ELŐSZÓ

Ez a jegyzet az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakán már több éve a III. év 2. félévében tartott előadásom tömör kivonata, kiegészítve a Laplace integrálról szóló fejezettel, ami rendszerint egy felsőbb éves komplex függvénytani előadás része.

Az anyag pusztán a valós és komplex függvénytan alapjainak ismeretét tételezi fel, és a komplex függvénytani, számelméleti és valószínűségszámítási "sávok" előkészítésére szolgál.

Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

Fourier integrálok rokonaikkal, mint a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

Fourier sorokkal vagy a valószínűségszámítás

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

karakterisztikus függvényével együtt a matematika számos területén felbukkannak. Ezek különböző változatait és legalapvetőbb tulajdonságait tárgyaljuk rendszerint konkrét, önmagában is érdekes függvénytani, számelméleti, valószínűségszámítási alkalmazás kapcsán.

A fejezetek végén egy-két, részletesebb információt nyújtó könyvet ajánlok.

A bevezető előadásban rendszerint nem szereplő, de itt felhasználásra kerülő komplex függvénytani tételeket a Függelékben bizonyítjuk be.

A jegyzet végén a tárgyaláshoz csatlakozó, azt kiegészítő, sok esetben azt magyarázó különböző nehézségű feladatokat gyüjtöttem össze; a fejezetekhez pusztán hozzáolvasni is érdemes azokat. Senkit se kedvetlenítsen el, ha egyesekkel önállóan nem boldogul, én sem tudom már mindet megoldani.

Budapest, 1996.

Halász Gábor

1. Fejezet

$\mathfrak{L}_1$ ELMÉLET

A számegyenesen értelmezett $f(x)$ (akár komplex értékű) függvény *Fourier integrálján* vagy *Fourier transzformáltján* a

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

függvényt értjük. Ez az f függvényre ható (lineáris) operátort definiál, amit így is jelölünk: $\varphi = \mathfrak{F}(f)$.

Ebben a fejezetben azzal a legegyszerűbb esettel foglalkozunk, amikor f $\mathfrak{L}_1$-beli, azaz Lebesgue mérhető és $\mathfrak{L}_1$ normája,

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Ekkor $\varphi(t)$ mint Lebesgue integrál létezik minden valós t-re, $|\varphi(t)| \le \|f\|_1$, és mivel az $e^{itx} f(x)$ függvényeknek t-től független integrálható majoránsuk van, nevezetesen $|f(x)|$, a Lebesgue kritérium szerint

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0),$$

$\varphi(t)$ tehát folytonos is.

Számítsuk ki f u-val való eltoltjának Fourier integrálját!

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x-u)\, dx = e^{itu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-u)} f(x-u)\, dx = e^{itu} \varphi(t).$$

Ennek első alkalmazásaként legyen $u = \pi/t$, amikoris $e^{itu} = e^{i\pi} = -1$, és vonjuk ki ezt φ eredeti alakjából:

$$|2\varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(f(x) - f(x-u))\, dx \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-u)|\, dx,$$

ami $u \to 0$, azaz $|t| \to \infty$ esetén, mint ismeretes, - "az eltolás folytonos $\mathfrak{L}_1$-ben" - 0-hoz tart, azaz $\varphi(t) \to 0$ ($|t| \to \infty$). Ez a *Riemann Lemma.*

A bizonyítás mutatja, hogy φ ∞-beli 0-hoz tartásának sebessége azzal van kapcsolatban, hogy f mennyire folytonos, milyen síma. Ez erősebb formában is így van: parciális integrálással

$$\varphi(t) = \left[\frac{e^{itx} f(x)}{it} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f'(x)\, dx,$$

ahonnan $\mathfrak{F}(f) = (i/t)\mathfrak{F}(f')$, feltéve, hogy lehet parciálisan integrálni, és a kiintegrált részek eltűnnek. (A kérdésre a "Sűrűségfüggvény becslése" c. fejezetben visszatérünk.) Most csak jegyezzük meg, hogy ha ezt még egyszer el lehet végezni, és $f'' \in \mathfrak{L}_1$, akkor - $\mathfrak{F}(f'')$ korlátos lévén - φ a végtelenben másodrendben eltűnik, és mivel korlátos is, $\varphi \in \mathfrak{L}_1$.

Második alkalmazásként szorozzuk be az eltolt Fourier integráljára vonatkozó képletünket egy $g(u)$ függvénnyel, és integráljunk u szerint. Formálisan

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x-u)\, dx\, du = \varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} g(u)\, du = \varphi(t)\psi(t),$$

ahol $\psi = \mathfrak{F}(g)$. A baloldalon a két integrált felcserélve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u)\, du\, dx$$

adódik. A belső integrál f és g *konvolúciója*, $f * g$, amit u-nak $x-u$-val való helyettesítésével így is írhatunk:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u)\, du.$$

A formális számolás érvényes lesz, ha a kettős integrálban mindenütt abszolút értéket írva,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u) g(u)|\, du\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\, du,$$

véges értéket kapunk, tehát ha g is $\in \mathfrak{L}_1$.

Foglaljuk össze a konvolúció tulajdonságait!

Állítás (Konvolúció). *$f, g, h \in \mathfrak{L}_1$ esetén $(f*g)(x)$ létezik majdnem minden x-re, $f*g = g*f \in \mathfrak{L}_1$, $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$, $(f*g)*h = f*(g*h)$, $\mathfrak{F}(f*g) = \mathfrak{F}(f)\cdot\mathfrak{F}(g)$.*

Az asszociativitás hiányzó bizonyítása:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(y-u)\, du\, h(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \int_{-\infty}^{\infty} g(y-u) h(x-y)\, dy\, du,$$

ahol a belső integrál $(g*h)(x-u)$. Hogy a kettős integrál majdnem minden x-re abszolút konvergens, és így a formális számolás jogos, a korábbiakból már következik.

INVERZIÓS KÉPLET. A következő célunk a Fourier integrál egyértelműségének igazolása azáltal, hogy φ-ből visszaszámoljuk f-et. A Fourier integrált a közelítőösszegével helyettesítve,

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\delta t} f(n\delta)\delta,$$

és a Fourier sor konstans tagjára vonatkozó képlet alapján

$$f(0)\delta \sim \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\delta}}^{\frac{\pi}{\delta}} \varphi(t)\, dt,$$

amiből azt sejtjük, hogy

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\, dt.$$

Számítsuk ki az integrált!

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{itx}\, dt\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Tx}{\pi x} f(x)\, dx.$$

Az itt fellépő magfüggvény nem tart elég gyorsan 0-hoz a ∞-ben, ezért – hasonlóan ahhoz, hogy folytonos függvény Fourier sora sem mindig konvergens – a megsejtett képletünket nem tudnánk kellő általánosságban bebizonyítani. Számítsuk ki képletünk integrálközepét!

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2\pi}\int_{-v}^{v}\varphi(t)\,dt\,dv = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\sin vx}{\pi x}\,dv\,f(x)\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos Tx}{\pi Tx^2}f(x)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{1-\cos Tx}{\pi Tx^2}(f(x)+f(-x))\,dx.$$

A baloldal

$$\frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{T}\int_{|t|}^{T} dv\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\varphi(t)\,dt.$$

Ismertnek véve, hogy

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos Tx}{\pi Tx^2}\,dx = \int_0^{\infty}\frac{1-\cos u}{\pi u^2}\,du = \frac{1}{2},$$

egyelőre tetszőleges A-val a következő azonosságot kapjuk:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\varphi(t)\,dt - A = \int_0^{\infty}\frac{1-\cos Tx}{\pi Tx^2}\delta(x)\,dx,$$

ahol $\delta(x) = f(x)+f(-x)-2A$.

Vezessük be a

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |\delta(u)|\,du$$

jelölést is. Felhasználva az elemi

$$\frac{1-\cos u}{\pi u^2} \le \begin{cases} \frac{u^2}{2\pi u^2} < \frac{1}{1+u^2}, & \text{ha } |u|\le 2,\\ \frac{2}{\pi u^2} < \frac{1}{1+u^2}, & \text{ha } |u|\ge 2,\end{cases}$$

egyenlőtlenségeket, képletünk jobboldala abszolút értékben így becsülhető:

$$\le T\int_0^{\infty}\frac{|\delta(x)|}{1+T^2x^2}\,dx = T\left[\frac{\Delta(x)x}{1+T^2x^2}\right]_0^{\infty} + 2T^3\int_0^{\infty}\frac{\Delta(x)x^2}{(1+T^2x^2)^2}\,dx =$$

$$\int_0^{\infty}\Delta\left(\frac{x}{T}\right)\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

A parciális integrálással kiintegrált rész azért tűnik el, mert

$$\Delta(x) \le \frac{1}{x}\int_{-x}^{x}|f(u)|\,du + 2|A|,$$

ami mutatja, hogy $\Delta(x) = O(1)$ az egész számegyenesen, kivéve 0 környezetét.

Ha ez 0 környezetében is fennáll, sőt $\Delta(x)\to 0$ $(x\to 0)$, akkor becslésünk a Lebesgue kritérium szerint $T\to+\infty$ esetén 0-hoz tart. Ez így van $A = (f(+0)+f(-0))/2$-vel, ha $f(\pm 0)$ létezik (ekkor már $\delta(x)\to 0$, és $\Delta(x)$-re nem is lenne szükség), vagy $A = f(0)$-lal, ha 0 *Lebesgue pont.* (Általában x-et akkor nevezik Lebesgue pontnak, ha $h\to 0$ esetén

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+u)-f(x)|\,du \to 0;$$

mint ismeretes, tetszőleges Lebesgue integrálható függvényre nézve majdnem minden x ilyen.) E két esetben tehát beláttuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\varphi(t)\,dt \to A.$$

f-et x-szel eltolva és visszaemlékezve arra, hogy az eltolás hogyan változtatja meg a Fourier transzformáltat, a következő megfordítási tételhez jutunk.

Inverziós Képlet.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)e^{-ixt}\varphi(t)\,dt \overset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \textit{ha } f(x\pm 0) \textit{ létezik,} \\ f(x) \textit{ majdnem minden } x\textit{-re.} \end{cases}$$

A Fourier sorok elméletében ennek Fejér tétele felel meg a részletösszegek számtani közepeinek, a *Fejér közepek*nek folytonossági pontokban való konvergenciájáról.

Speciális Eset. Különösen egyszerű alakot ölt a megfordítási képlet, ha φ is $\in \mathfrak{L}_1$. Ekkor ismét a Lebesgue kritérium szerint az integrál határértéke, amidőn $T \to +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\varphi(t)\,dt,$$

és majdnem minden x-re

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{F}(\varphi)(-x) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathfrak{F}(\overline{\varphi})}.$$

Legyen $\psi \in \mathfrak{L}_1$, $g = \mathfrak{F}(\psi)$. Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\psi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\psi(t)\,dt\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx;$$

a Tételünk bizonyításának kiindulása tulajdonképpen ez a formula volt a

$$\psi(t) = \begin{cases} 1-\frac{|t|}{T}, & \text{ha } |t| \le T, \\ 0, & \text{ha } |t| \ge T, \end{cases}$$

háromszögfüggvénnyel felírva.

Emlékeztetünk az $\mathfrak{L}_2$-ben, tehát a Lebesgue mérhető és négyzetesen integrálható függvények terében értelmezett skaláris szorzat és norma definíciójára:

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx}.$$

Képletünket ψ helyett $\overline{\psi}$-ra alkalmazva

$$\int \mathfrak{F}(f)\overline{\psi} = \int f\mathfrak{F}(\overline{\psi}),$$

ami a skaláris szorzattal az $(\mathfrak{F}(f),\psi) = (f,\overline{\mathfrak{F}(\overline{\psi})})$ alakban írható. A funkcionálanalízis nyelvén ez azt fejezi ki, hogy az $\mathfrak{F}$ operátor adjungáltja $\overline{\mathfrak{F}(\overline{\ })}$.

Legyen most $g \in \mathfrak{L}_1$, és tegyük fel, hogy $\psi \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{F}(g) \in \mathfrak{L}_1$. Ekkor az Inverziós Képlet Speciális Eseteként $2\pi g = \overline{\mathfrak{F}(\overline{\psi})}$ adódik, és a skaláris szorzatok előző egyenlősége az $(\mathfrak{F}(f),\mathfrak{F}(g)) = 2\pi(f,g)$ alakot ölti, mással a $\mathfrak{F}$ operátor a 2π szorzótól eltekintve skalárszorzat- és normatartó. Ez lesz majd az alapja az $\mathfrak{L}_2$ elméletnek.

(Más $\mathfrak{L}_p$ ($p \geq 1$) terekben is fogjuk később értelmezni a Fourier transzformáltat. Jegyezzük meg már most, hogy amennyiben arra is fenn fog állni Tételünk bizonyításának kiinduló formulája, akkor a tétel maga is, ugyanis $\Delta(x)$ korábbi korlátját a Hölder egyenlőtlenséggel tovább becsülve

$$\Delta(x) \leq \frac{1}{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^p \, du\right)^{1/p} (2x)^{1-1/p} + 2|A|,$$

amiből $f \in \mathfrak{L}_p$ esetén is következik, hogy $\Delta(x)$ korlátos, ha x el van határolva a 0-tól, míg a többi lépés automatikusan érvényben marad.)

IRODALOM

E.C. Titchmarsh: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, Oxford 1937, 390 oldal.
A. Zygmund: *Trigonometric series*, University Press, Cambridge 1968, 1. és 2. kötet.