1. Komplex függvénytan gyakorlat, 2019. február 13/15.

A gyakorlatok feladatsorait innen is le lehet tölteni: https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-kft/

További gyakorló feladatok: Fehér–Kós–Tóth: Analízis feladatgyűjtemény II. http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101

Várható ZH időpontok: március 19–22. és május 7.

Osztályozás: a gyakorlati jegy $\approx \frac{2\cdot Z_1+2\cdot Z_2+\overline{R}+P}{5} \pm M$, ahol $Z_1, Z_2 \in [0,7]$ a két ZH pontszám, $\overline{R}\in[0,6]$ a röpdolgozatok átlaga a legrosszabb nélkül, P a megszerzett Pedál Medál pirospontok száma, M az órai munka (pofafaktor). Javítási lehetőség: a pót ZH-n (várható időpont: május 21.).

1.1. $(1+\sqrt{3}i)^{30}=?$ $\quad \sqrt[3]{i}=?$ $\quad \sqrt[4]{i}=?$

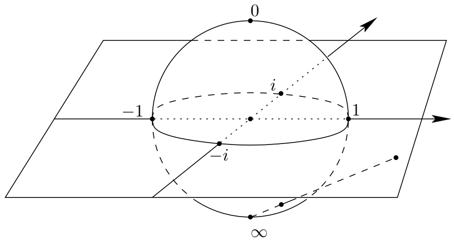
1.2. Ábrázoljuk azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amelyekre
(a) $0\le \arg z\le \pi$; (b) $-\pi<\arg z\le\pi$; (c) $\arg(z+1)=\arg(2z-1)$;
(d) $\operatorname{Re}(z^2)\ge 4$; (e) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$; (f) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2$.

1.3. Legyen $a,b,c\in\mathbb{C}$.
(a) Igazoljuk, hogy a $(c-a)\cdot\overline{(b-a)}$ komplex szám akkor és csak akkor tisztán valós, ha az a,b,c pontok egy egyenesre esnek.
(b) Milyen geometriai jelentése van az $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\big((c-a)\cdot\overline{(b-a)}\big)$ számnak?

1.4. Jól ismerjük, hogy az $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots$ összeget kiszámíthatjuk az $(1+1)^n$ és $(1-1)^n$ hatványoknak a binomiális tétel szerinti kifejtéséből. Hogyan számíthatjuk ki az $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\dots$ összeget?

1.5. Feleltessük meg az egységnyi sugarú gömb pontjait a $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ halmaznak sztereografikus projekcióval (inverzióval) az ábra szerint. (Az előadáson egy másik természetes megfeleltetés volt a sík és a gömb között.) A gömb milyen transzformációit írják le a következő függvények?

$$z\mapsto -z;\quad z\mapsto \overline{z};\quad z\mapsto iz;\quad z\mapsto \frac{1}{z};\quad z\mapsto \frac{-1}{\overline{z}}$$



1.6. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Cauchy-Riemann egyenletek a következő függvényekre:

$$(x^2+y^2,2xy);\qquad (x^2-y^2,2xy);\qquad (e^x\cos y, e^x\sin y).$$

1.7. Keressünk olyan $v(x,y):R^2\to\mathbb{R}$ függvényt (ha van), amelyre az $f(x+iy)=e^y\sin x+iv(x,y)$ függvény mindenütt differenciálható.

Házi feladatok

1.8. Ábrázold azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amikre
(e) $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}\ge 0$; (f) $0<\operatorname{Re}(iz)<2\pi$; (g) $|\arg(z)|<\frac{\pi}{4}$; (h) $\operatorname{Im}(z^2)<4$;

1.9. (a) Alakítsd szorzattá az $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ kifejezést.
(b) Mutasd meg, hogy az a,b,c komplex számok pontok akkor és csak akkor alkotnak (esetleg egy ponttá fajuló) szabályos háromszöget, ha $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

1.10. Keress olyan $v(x,y):R^2\to\mathbb{R}$ függvényt (ha van), melyre az $f(x+iy)=3x+2y+iv(x,y)$ mindenütt differenciálható.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM1.1. Legyen $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, ekkor $\varepsilon^5=1$ vagyis ε egy ötödik egységgyök. Legyen $z=\varepsilon+\varepsilon^4$ és $w=\varepsilon^2+\varepsilon^3$.
(a) Számold ki $(z+w)$-t és zw-t.
(b) A fentieket felhasználva adj meg eljárást szabályos 5-szög szerkesztésére.