

## 2. Komplex függvénytan gyakorlat, 2019. február 20/22.

2.1. Igaz vagy hamis?

- (a) Ha az  $f(z)$  függvény differenciálható a  $z_0$  pontban, akkor  $\overline{f(z)}$  differenciálható a  $z_0$  pontban.  
(b) Ha  $f(z)$  differenciálható  $z_0$ -ban, akkor  $f(\bar{z})$  differenciálható  $\bar{z}_0$ -ban.  
(c) Ha  $f(z)$  függvény differenciálható  $z_0$ -ban, akkor  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  differenciálható  $\bar{z}_0$ -ban.

2.2. Milyen azonosságokat kaphatunk az  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  azonosság négyzetre emelésével, illetve deriválásával?

2.3. Hol konvergálnak és mely reguláris függvényhez az alábbi hatványsorok?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (2z+1)^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z)^n}{n}$$

2.4. Fejtsük hatványsorba a 0 körül az  $f(z) = \frac{1}{z+1}$  és a  $g(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}$  függvényt.

2.5. (a) Van-e valós értéke  $(-1)^i$ -nek?

- (b) Számítsuk ki  $\log(1+i)$  összes értékét.

2.6. Ábrázoljuk a síkon a következő halmazt:

$$\left\{ e^z : 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} \right\};$$

### Házi feladatok

2.7. (a) Igazoljuk, hogy a  $w(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  függvény (Zsukovszkij-leképezés) a 0 középpontú köröket  $-1, 1$  fókuszú ellipszisekbe, a 0-n átmenő egyeneseket  $-1, 1$  fókuszú hiperbolákba képezi.

(b) Igazoljuk a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy a  $-1, 1$  fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

2.8. Fejtsük hatványsorba a 0 körül az  $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$  függvényt.

2.9. Van-e határértéke az  $e^{-1/z^4}$  függvénynek a 0-ban?

2.10. Ábrázoljuk  $(1-i)^i$  értékeit.

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM2.1. Tegyük fel, hogy az  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  hatványsor konvergens az  $|z| < r + \varepsilon$  körön. Igazold, hogy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(Parseval-formula hatványsorokra)