

## 4. Komplex függvénytan gyakorlat, 2019. március 6/8.

4.1.

$$\int_{|z|=1} \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} dz =?; \quad \int_{|z|=1} \bar{z} dz =?; \quad \int_{[1,i]} z^2 dz =?$$

4.2. Legyen  $a$  komplex szám. Alakítsuk át egy holomorf függvény komplex vonalintegráljává az  $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |z-a|^2 |dz|$  integrált, majd számítsuk ki.

4.3. Van-e primitív függvényük?

$$(a) f(z) = \frac{1}{z} \quad (D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (b) f(z) = \frac{1}{z} \quad (D(f) = \operatorname{Re} z > 0) \quad (c) \frac{\sin z}{z^n}$$

4.4. A  $p(z)$  legalább másodfokú polinom gyökei az  $|z| < \varrho$  kör belsejébe esnek. Legyen tetszőleges  $R > \varrho$  esetén

$$I(R) = \int_{|z|=R} \frac{dz}{p(z)}.$$

Igazoljuk, hogy (a)  $|I(R)| \leq O(1/R)$ ; (b)  $I(R)$  értéke állandó; (c)  $I(R) = 0$ .

(d) Igazoljuk, hogy a  $|z| > \varrho$  tartományon az  $\frac{1}{p(z)}$  függvénynek van primitív függvénye.

### Házi feladatok

4.5. Számítsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

$$\int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z} dz \quad \int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^3} dz \quad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z} dz \quad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^4} dz$$

4.6.  $\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |z-a|^4 |dz| =?$

4.7. Az  $f(z)$  függvény holomorf a  $0 < |z| < 1$  halmazon, és  $|f(z)| < \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ . Mutassuk meg, hogy

- (a)  $f$ -nek minden 0 körüli körön 0 a vonalintegrálja;
- (b)  $f$ -nek van primitív függvénye.

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM4.1. Tudjuk, hogy  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot dx = \sqrt{2\pi}$ . Ennek felhasználásával igazoljuk, hogy tetszőleges  $a$  valós számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{iax} dx = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-a^2/2},$$

avagy haranggörbe Fourier-transzformáltja is haranggörbe.