5. Komplex függvénytan gyakorlat, 2019. március 12/13.

5.1. Milyen integrálformulákat kaphatunk az $f(z) = n(z,\gamma) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$ Cauchy-formula, mint paraméteres vonalintegrál (z szerinti) differenciálásával?

5.2. Legyen a és r is pozitív valós szám.

$$\int\limits_{|z|=r} a^z \mathrm{d}z = ? \qquad \int\limits_{|z|=r} \frac{a^z}{z+1} \mathrm{d}z = ? \qquad \int\limits_{|z|=r} \frac{a^z}{(z+2)^2} \mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \mathrm{d}z = ? \quad (n \in \mathbb{Z})$$

5.3. Az $f(z)$ függvény holomorf az egységkör belsejében, és $|f| < 1$. Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$? (Írjuk fel az együtthatóformulát vagy a deriváltra vonatkozó Cauchy-formulát egy $r < 1$ sugarú körön, becsüljünk triviálisan, majd tartsunk r-rel 1-hez.)

5.4. Mutassunk olyan nem azonosan 0 függvényt, ami holomorf az egységkör belsejében, és ott végtelen sok gyöke van. Miért nem mond ez ellent az unicitás-tételnek?

5.5. Igazoljuk, hogy ha az f egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény. (1. módszer: alkalmazzuk az unicitástételt az $f(z)$, $\overline{f(\bar{z})}$ és $\overline{f(-\bar{z})}$ függvényekre. 2. módszer: fejtsük hatványsorba a függvényt a 0 körül, és vizsgáljuk az együtthatókat.)

Házi feladatok

5.6.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \cos z \mathrm{d}z = ? \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{4}} \mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)^3} \mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2-4} \mathrm{d}z = ?$$

5.7. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$? (Vizsgáld a $g(z) = f(z)\overline{f(\overline{z})}$ függvényt.)

5.8. Az f függvény holomorf az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $[1, 2]$ szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutasd meg, hogy a $[-1, -2]$ szakaszon is csak valós értékei vannak.

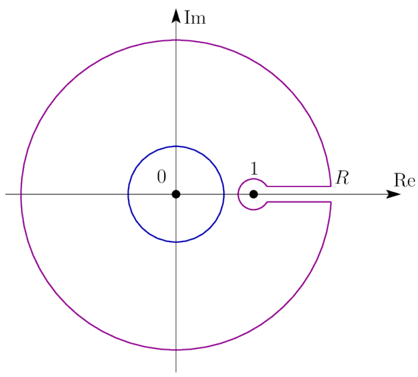
Miért nem működik a megoldás az $1 < |z| < 2$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ tartománnyal?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM5.1. *„Az $a_0, a_1, \ldots,$ sorozatban $a_0 = -1$, és tetszőleges $n \geq 1$-re $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = 0$. Igazoljuk, hogy $n \geq 1$ esetén $a_n > 0$."* (Olimpiai feladatjavaslat, 2006; rövid teljes indukciós megoldása is van.)

Oldd meg a feladatot komplex függvénytani eszközökkel.

1. Számítsd ki az $f(z) = \sum_{n=0}^{n} a_n z^n$ generátorfüggvényt.
2. Írd fel az együtthatóformulát egy 0 körüli körön.
3. Cseréld ki az integrációs utat az ábrán látható "kulcslyukgörbére".



4. Mutasd meg, hogy $a_n = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n(\pi^2 + \log^2(x-1))}$, ami persze pozitív.