

## 6. Komplex függvénytan gyakorlat, 2019. március 20/22.

**6.1.** Legyen  $f(z)$  olyan egészfüggvény, amire  $|f(z)| \leq e^{|z|}$ , és legyen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  a függvény 0 körüli hatványsora.

Igazoljuk, hogy  $|a_n| \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n$ . (Írjuk fel az együtthatóforulát, és válasszunk olyan sugarat, amire a triviális becslés a legjobb felső becslést adja.)

**6.2.** A Liouville-tétel segítségével igazoljuk, hogy ha  $f$  kétszeresen periodikus egész függvény (vagyis  $f(z+a) = f(z)$ ,  $f(z+b) = f(z)$ , és az  $a, b$  periódusok nem egy közös  $c$  periódus egész számszorosai), akkor  $f$  konstans.

**6.3.** A Liouville-tételből vezessük le, hogy ha az  $f(z)$  egy egészfüggvény nem konstans, akkor (a)  $f$  értékei torlódnak a 0-hoz, vagyis a 0-hoz bármilyen közel felvesz értékeket; (b) az értékkészlete sűrű a síkon, sőt a gömbön is.

**6.4.** A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény holomorf és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

**6.5.** Fejtsük Laurent-sorba az

$$f(z) = \frac{z^3}{z^2 + 4z + 3}$$

függvényt az 1 körül, az  $2 < |z - 1| < 4$  halmazon.

1. Osszuk el maradékosan. 2. Bontsuk parciális törekre. 3. Írjunk át mindent  $(z - 1)$ -re. 4. Emeljük ki a nevezőkből a nagyobb abszolút értékű tagot. 5. Írjuk be az  $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  azonosságot.

**6.6.** Írjuk fel a ctg  $z$  függvény 0-körüli Laurent sorának első három nemnulla tagját.

### Házi feladatok

**6.7.** A Liouville-tételből vezesd le, hogy ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor (a) a  $[-1, 1]$  szakaszon van értéke; (b) minden egyenes szakaszon van értéke. (Használd a Zsukovszkij-függvényt inverzét.)

**6.8.** Az  $f$  függvény holomorf az  $|z| < 1 + \varepsilon$  körlemezben. Legyen  $A = \max_{0 \leq t \leq \pi} |f(e^{it})|$  és  $B = \max_{\pi \leq t \leq 2\pi} |f(e^{it})|$ . Bizonyítsuk be, hogy  $|f(0)| \leq \sqrt{AB}$ . (Írd fel a maximum-elvet egy alkalmas függvényre.)

**6.9.** Fejtsd Laurent-sorba a  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)}$  függvényt az  $1 < |z-1| < 2$  tartományon.

**6.10.** Írd fel az  $\frac{e^z}{1+z+z^2}$  függvény 0 körüli Laurent sorának első 3 nemnulla tagját.

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

**PM6.1.** Vezesd le a maximum-elvet a Parseval-formulából.