

## Komplex függvénytan ZH, 2019. március 26.

Minden beadott lapra írd rá nevedet, és legalább az első, kívülre kerülő oldalra a gyakorlatvezetőd nevét.

Minden feladat 1 pontot ér. Részpontoszám is kapható. A dolgozat értéke (osztályzata) körülbelül az összpontoszámmal egyezik meg.

Semmilyen segédeszköz sem használható, számológép sem.

1. Számítsd ki  $(-i)^i$  összes értékét.
2. Mutass példát olyan  $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt (ha van), amelyre az  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  függvény mindenütt differenciálható, ha
  - (a)  $v(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ;
  - (b)  $v(x, y) = x^2 + y^2$ .
3. Fejtsd hatványsorba az 1 körül az  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$  függvényt. Mi a hatványsor konvergenciasugara?
4. Ábrázold a  $\left\{ \log \frac{1-z}{1+z} : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z = 0 \right\}$  halmazt. (A log a logaritmus főértékét jelenti.)
5. Az  $f$  függvény holomorf az egységkörlemezen, és  $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ . Mutasd meg, hogy  $|f'(0)| \leq 4$ .
6. (a) Van-e primitív függvénye a  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$  tartományon az  $f(z) = \frac{1}{z^3 - z}$  függvénynek?  
(b) Van-e primitív függvénye a  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  tartományon ( $[-1, 1]$  az 1 és  $-1$  pontokat összekötő zárt szakasz) az  $f(z) = \frac{1}{z^3 - z}$  függvénynek?
7. Az  $f$  egészfüggvényre tetszőleges  $n$  pozitív egész esetén  $\operatorname{Re} f(1/n) = 1/n^2$ . Mi lehet  $\operatorname{Re} f(-1)$ ?