

## 7. Komplex függvénytan gyakorlat, 2019. április 3/5.

7.1. Adjuk meg az alábbi függvények összes izolált szingularitását, nevezzük meg a szingularitások típusait, és számítsuk ki a reziduumot

$$\frac{1}{z} \quad \frac{1}{z^2} \quad \frac{1}{\sin z} \quad \sin \frac{1}{z} \quad \frac{1}{\sin(1/z)} \quad \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \quad \frac{z}{\sin z} \quad e^{1/z} \quad \frac{1}{e^{1/z}}$$

7.2. Igazoljuk, hogy ha az  $f(z)$  függvény holomorf az  $a$  pont egy pontozott környezetében, és ott  $|f(z)| > 1$ , akkor  $a$  megszüntethető szingularitás vagy pólus.

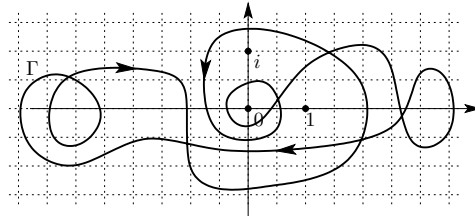
7.3. Mi a  $\frac{\operatorname{tg} z}{1 - \cos z}$  és a  $\frac{e^z}{\operatorname{tg} z - \sin z}$  függvények reziduuma a 0-ban?

7.4. Számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{1 - \cos z} dz.$$

7.5.

$$\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 + 1} dz =? \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z + \pi)^2 \cos z} =?$$



### Házi feladatok

7.6. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{1 + e^z}; \quad \frac{e^z}{(z^2 - 1)^3} \quad \frac{e^z - z^3 + 8}{z^2 + 1} \quad \frac{e^z}{z^2 + 4} \quad \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2}$$

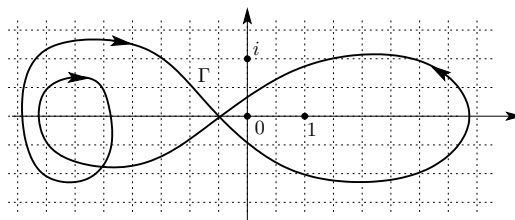
7.7. Igazoljuk, hogy ha  $f$ -nek  $a$ -ban izolált szingularitása van, és vannak olyan  $z_n \rightarrow a$  és  $w_n \rightarrow a$  sorozatok, hogy  $f(z_n) \rightarrow 1$ ,  $f(w_n) \rightarrow 2$ , akkor van olyan  $s_n \rightarrow a$  sorozat is, hogy  $f(s_n) \rightarrow 3$ .

7.8. Számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{e^z - 1} dz.$$

7.9.

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\cos z} =? \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} =?$$



### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM7.1. Lehet-e az  $f$  függvény izolált szingularitása  $e^f$ -nek pólusa?