

9. Komplex függvénytan gyakorlat, 2019. április 16/24.

9.1. Az argumentum-elvből mutassuk meg, hogy egy elliptikus (két irányban periodikus), nem konstans meromorf függvény a fundamentális paralelogrammán minden értéket és a ∞ -t is (multiplicitással) ugyanannyiszor, de legalább kétszer vesz fel.

9.2. (a) Hova képezi az $\frac{10z+5}{z+2}$ függvény az egységkörvonalat és a $|z|=3$ kört?

(b) Hány gyöke van (multiplicitással számolva) az

$$\frac{10z+5}{z+2} = 4z^3$$

egyenletnek az $1 < |z| < 3$ tartományon?

9.3. Írjunk fel (lehetőleg számolás nélkül) egy-egy olyan törtlineáris függvényt, ami

(a) a felső félsíkot önmagára képezi úgy, hogy a $0, 1, \infty$ pontok képe rendre $1, \infty, 0$,

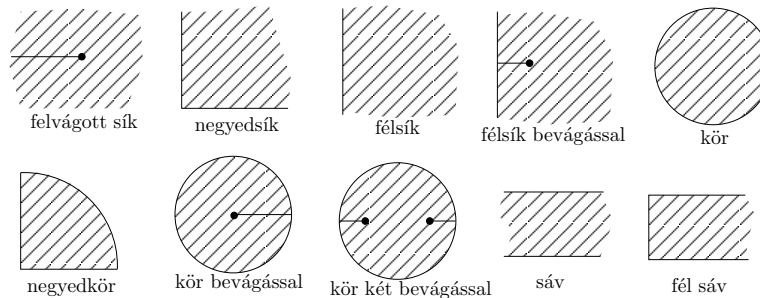
(b) az egységkört a jobb félsíkba képezi,

(c) a jobb félsíkot az egységkörbe képezi, illetve

(d) az egységkör felső felét az első síknegyedbe képezi.

9.4. Ellenőrizzük közvetlenül, hogy a $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ függvény az egységkörvonalat önmagára képezi.

9.5. Az ábrán tízféle tartomány látható. Keressünk közöttük konform megfeleltetéseket (oda-vissza differenciálható bijekciókat).



Házi feladatok

9.6. Hány gyöke és hány pólusa van (multiplicitással számolva) az

$$\frac{z - \frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}z} = \frac{8}{9}z^4$$

egyenletnek az $1 < |z| < 3$ tartományon?

9.7. Mutass példát (képletet) konform megfeleltetésre a $D_1 = \{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$ és a $D_2 = \{z : |z| < 1 \text{ és } \operatorname{Re} z > 0\}$ tartományok között.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM9.1. Az $f : D \rightarrow D$ holomorf függvény gyökei w_1, w_2, \dots, w_n . Bizonyítsd be, hogy $|f(0)| \leq |w_1 w_2 \dots w_n|$.