

10. Komplex függvénytan gyakorlat, 2019. május 7/8.

10.1. Legyen φ a felső félsík olyan automorfizmusa, amelyre $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 3$ és $\varphi(\varphi(3)) = 0$. Mi lehet $\varphi(3)$?

10.2. Legyen D az egységkör, $f : D \rightarrow D$ holomorf, és $a \in D$ az f -nek gyöke. Bizonyítsuk be, hogy $|f(z)| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$, mégpedig

(a) a $g(z) = f(z) \cdot \frac{1-\bar{a}z}{z-a}$ függvény vizsgálatával;

(b) a $h(w) = f\left(\frac{w+a}{1+\bar{a}w}\right)$ függvény vizsgálatával és a Schwarz-lemmával.

10.3. Legyen $J = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ a nyílt jobb félsík. Az $f : J \rightarrow J$ függvény holomorf, és $f(1) = 1$.

(a) Írjunk fel olyan $\varphi : D \rightarrow J$ és $\psi : J \rightarrow D$ konform megfeleltetéseket, amelyekre $\varphi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$.

(b) Alkalmazzuk a Schwarz-lemmát a $\psi \circ f \circ \varphi$ függvényre, és bizonyítsuk be, hogy $|f'(1)| \leq 1$.

(c) Bizonyítsuk be, hogy $\left| f(2) - \frac{5}{4} \right| \leq \frac{3}{4}$.

10.4. Legyen f az a konform leképezés, ami az $\{z : |z| < 2, |\arg z| < \frac{\pi}{3}\}$ körcikket az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.

(a) A körcikk tükrözésével terjesszük ki a függvényt előbb az egységkör jobb felére, majd az egész körre, majd az egész gömbre.

(b) Gondoljuk meg, hogy kiterjesztett függvény csak egy racionális tört függvény lehet. Mik a gyökei és pólusai?

(c) A gyökök és pólusok segítségével írjuk fel a függvényt képlettel.

Házi feladatok

10.5. (a) Mik a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmaz egy konform automorfizmusai?

(b) Bizonyítsd be, hogy ha az $r_1 < |z| < R_1$ és $r_2 < |z| < R_2$ gyűrűk konform ekvivalensek, akkor $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$. (A tartomány tükrözésével terjesszük ki a függvényt a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmaz egy konform automorfizmusává.)

10.6. Legyen $H = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

(a) Írd fel azt az $f : H \rightarrow H$ konform leképezést, amelyre $f(0) = 1$, $f(1) = i$ és $f(i) = 0$.

(b) Igazold, hogy f kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvénné. Hol vannak a kiterjesztett függvény pólusai?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM10.1. Legyen φ olyan konform megfeleltetés az $ABCDE$ szabályos ötszög és a felső félsík között úgy, hogy $\varphi(A) = -1$, $\varphi(B) = 0$ és $\varphi(C) = 1$. Mi lehet $\varphi(D)$ és $\varphi(E)$?