Matematika problémamegoldó szeminárium, 2019. február 12.

http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2019tav-prob/

1.1. Legyen $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitív valós számokból álló, 0-hoz tartó sorozat.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n} + \varepsilon_n\right) = ?$$

1.2. Bizonyítsd be, hogy ha A és B $n \times n$-es valós mátrixok, $A^2 + B^2 = AB$ és $AB - BA$ invertálható, akkor n osztható 3-mal.

1.3. Legyen M egy $2n \times 2n$-es invertálható mátrix. Írjuk M-et és M^{-1}-et a következő blokk alakban:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy $\det M \cdot \det H = \det A$.

1.4. Igazoljuk, hogy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\log n)}{n^{\alpha}}$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\alpha > 0$.

1.5. Az $\mathcal{A}$ és a $\mathcal{B}$ halmazrendszer elemei legfeljebb n-elemű halmazok, ahol n adott pozitív egész. Tudjuk, hogy tetszőleges F véges halmazhoz létezik olyan $X \in \mathcal{A}$ és $Y \in \mathcal{B}$, amelyekre $X \cap Y \cap F = \emptyset$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $X \in \mathcal{A}$ és $Y \in \mathcal{B}$ is, amelyekre $X \cap Y = \emptyset$.

1.6. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Azt mondjuk, hogy f „metszi az x-tengelyt" az x pontban, ha x tetszőleges környezetében a függvény pozitív és negatív értéket is felvesz.

(a) Mutass példát olyan függvényre, ami végtelen sok helyen metszi az x-tengelyt.

(b) Lehetséges-e, hogy egy folytonos függvény $\aleph_0$-nál több pontban metszi az x-tengelyt?

1.7. Legyen $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ monoton növekvő, differenciálható függvény, amire $\lim_{\infty} f = \infty$ és f' korlátos. Legyen $F(x) = \int_0^x f$. Definiáljuk az $a_0, a_1, \dots$ sorozatot a következőképpen:

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{f(a_n)}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} \big(a_n - F^{-1}(n)\big) = 0$.

1.8. (Írásban, angolul beadható.) Suppose $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges. Do the following sums have to converge as well?

(a) $a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{16} + a_{15} + \dots + a_9 + a_{32} + \dots$

(b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 + a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + \dots$