Matematika problémamegoldó szeminárium, 2019. február 19.

http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2019tav-prob/

2.1. Legfeljebb hány vektort lehet kiválasztani az n-dimenziós térben úgy, hogy bármelyik kettő tompaszöget zárjon be?

2.2. Az $(a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ mátrixra teljesül, hogy tetszőleges $1 \le k \le n$ és $1 \le h_1 < \cdots < h_k \le n$ esetén $\det(a_{h_i h_j})_{i,j=1,2,\ldots,k} = 0$. Bizonyítsd be, hogy $A^n = 0$ és létezik az $1, 2, \ldots, n$ számoknak egy olyan σ permutációja, amelyre az $(a_{\sigma(i)\sigma(j)})_{i,j=1,\ldots,n}$ mátrixban csak a főátló alatt vannak nem 0 elemek.

2.3. A p, q, r egész számok páronként relatív prímek. Igazoljuk, hogy ha egy kommutatív csoportban valamely a, b elemekre $a^p = b^q = (ab)^r = e$, akkor $a = b = e$.

Igaz-e ugyanez az állítás nem kommutatív csoportokra is?

2.4. Az $a_1, a_2, \ldots, a_r$ és $b_1, b_2, \ldots, b_s$ nemnegatív valós számokra

$$(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r)(1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_sx^s) = 1 = x + x^2 + \cdots + x^{r+s}.$$

Igazoljuk, hogy mindegyik a_i és b_j értéke 0 vagy 1.

2.5. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ és $6^n - 1$ osztható n-nel, akkor n osztható 5-tel.

2.6. Tetszőleges pozitív egész n-re legyen $f_n(\vartheta) = \sin\vartheta \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \sin(4\vartheta) \cdot \ldots \cdot \sin(2^n\vartheta)$. Igazoljuk, hogy

$$|f_n(\vartheta)| \le \frac{2}{\sqrt{3}} |f_n(\pi/3)|.$$

2.7. A differenciálható $a, b, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy

$$\lim_{\infty} a = A > 0, \quad \lim_{\infty} b = B > 0, \quad \lim_{\infty} f = \lim_{\infty} g = \infty,$$

továbbá

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x)\frac{f(x)}{g(x)} = b(x).$$

Bizonyítsd be, hogy

$$\lim_{\infty} \frac{f}{g} = \frac{B}{A+1}.$$

2.8. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges nemnegatív valós számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozathoz léteznek olyan $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ indexek, amelyekre

$$\sum_{i=0}^{\infty} n_{i+1} a_{n_i} \le 3a_1 + e \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

2.9. (Írásban, angolul beadható.) Let A be an $n \times n$ matrix such that $A \ne \lambda I$ for all $\lambda \in \mathbb{C}$. Prove that A is similar to a matrix having at most one non-zero entry on the main diagonal.