Matematika problémamegoldó szeminárium, 2019. február 26.

http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2019tav-prob/

3.1. Számítsuk ki az $n \times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrix determinánsát, ha

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|} & \text{ha } i \neq j, \\ 2 & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

3.2. Egy matematikaversenyen 200 versenyző vett részt, 6 feladatot kellett megoldaniuk. Tudjuk, hogy mindegyik feladatot legalább 120-an megoldották. Igazoljuk, hogy kiválasztható két versenyző úgy, hogy mindegyik feladatot legalább az egyikük megoldotta.

3.3. Mutassuk meg, hogy ha egy valószínűségi változó értéke az $[a, b]$ intervallumba esik, akkor a szórása legfeljebb $\frac{b-a}{2}$.

3.4. Legyen $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos függvény, és legyen $p \in [a, b]$. Definiáljuk a $p_0, p_1, \ldots$ sorozatot a $p_0 = p$, $p_{n+1} = f(p_n)$ rekurzióval. Igazoljuk, hogy ha a $T_p = \{p_n : \ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ halmaz zárt, akkor véges.

3.5. Igazak-e a következő állítások?

(a) Létezik olyan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ monoton függvény, amelyre tetszőleges $y \in [0, 1]$ esetén az $f(x) = y$ egyenletnek $\aleph_0$-nál több megoldása van.

(b) Létezik olyan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre tetszőleges $y \in [0, 1]$ esetén az $f(x) = y$ egyenletnek $\aleph_0$-nál több megoldása van.

3.6. Legyen n pozitív egész és

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^n}{k!}.$$

Igazoljuk, hogy $a_n \cdot b_n$ egész szám.

3.7. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható konvex függvény, és tegyük fel, hogy

$$\exists L > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad ||\nabla f(x) - \nabla f(y)|| \leq L||x - y||.$$

Igazoljuk, hogy

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad ||\nabla f(x) - \nabla f(y)||^2 \leq L \left\langle \nabla f(x) - \nabla f(y),\, x - y \right\rangle.$$

(A $\langle \ldots \rangle$ szimbólum a skaláris szorzást jelenti.)

3.8. Az $n \times n$-es A mátrixra teljesül, hogy tetszőleges k pozitív egész esetén $||A^k - A^{k-1}|| \leq \frac{1}{2009k}$. Igazoljuk, hogy $||A^k|| < 2009$. ($||A|| = \max\{||Ax||_2 : \ ||x||_2 = 1\}$.)

3.9. (Írásban, angolul beadható.) Let n be a positive integer and let

$$a_k = \frac{1}{\binom{n}{k}}, \quad b_k = 2^{k-n} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Show that

$$\frac{a_1 - b_1}{1} + \frac{a_2 - b_2}{2} + \cdots + \frac{a_n - b_n}{n} = 0.$$