Matematika problémamegoldó szeminárium, 2019. március 5.

http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2019tav-prob/

4.1. Legyen $p > 3$ prím és $n = \dfrac{4^p - 1}{3}$. Mutasd meg, hogy $2^n - 2$ osztható n-nel.

4.2. A pozitív $x_1, \ldots, x_n$ számokra

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Bizonyítsd be, hogy

$$\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n} \ge (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

4.3. Legyen E az összes olyan $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvények halmaza, amelyekre tetszőleges $t \in [0,1]$ esetén

$$u^2(t) \le 1 + 4\int_0^t s|u(s)|ds.$$

Legyen $\varphi : E \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(u) = \int_0^1 \big(u^2(x) - u(x)\big)dx.$$

Igazold, hogy φ-nek létezik maximuma és számítsd is ki.

4.4. Bizonyítsd be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n}dx - 1\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

4.5. Legyen A $n \times n$-es komplex mátrix. Igazold, hogy A és $\overline{A}$ akkor és csak akkor egymás inverzei, ha létezik olyan invertálható S mátrix, amire $A = S^{-1}\overline{S}$.

4.6. (a) Bizonyítsd be, hogy minden $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ függvényhez létezik olyan $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, amire tetszéleges $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén $f(x,y) \le g(x) + g(y)$.

(b) Mutass példát olyan $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amire tetszőleges $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén létezik olyan $x, y \in \mathbb{R}$, hogy $f(x,y) > g(x) + g(y)$.

4.7. Legyen n pozitív egész és $u > 0$ valós szám. Bizonyítsd be, hogy

$$\prod_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (u+2k)^{\binom{n}{2k}} < \prod_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (u+2k+1)^{\binom{n}{2k+1}}.$$

4.8. (Írásban, angolul beadható.) A ring R (not necessarily commutative) contains at least one zero divisor and the numbers of left and right zero divisors are finite. Prove that R is finite.