Matematika problémamegoldó szeminárium, 2019. március 19.

`http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2019tav-prob/`

6.1. Legyen $f \in C^1(a,b)$, $\lim\limits_{a+} f = \infty$, $\lim\limits_{b-} f = -\infty$, és $f'(x) + f^2(x) \geq -1$. Bizonyítandó, hogy $b - a \geq \pi$. Mutass példát olyan függvényre, amikor éppen $b - a = \pi$.

6.2. Az S halmaznak $2n-1$ eleme van, irracionális számok. Bizonyítsd be, hogy kiválaszthatók olyan $x_1, \dots, x_n \in S$ elemek úgy, hogy valahányszor $a_1, \dots, a_n$ nemnegatív racionális számok és az összegük pozitív, akkor $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ irracionális.

6.3. Legyen $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris operátorok, amelyekre $F \circ G - G \circ F = \alpha F$.

(a) Mutasd meg, hogy tetszőleges k pozitív egészre $F^k \circ G - G \circ F^k = k\alpha F^k$.

(b) Bizonyítsd be, hogy létezik olyan k, amire $F^k = 0$.

6.4. Legyen $c_0 = 1$, $c_{n+1} = 2 + \sqrt{c_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{c_n}}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n = ?$$

6.5. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges n pozitív egészhez létezik olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amiben minden együttható $+1$, -1 vagy 0, és az 1-ben legalább $c\sqrt{\dfrac{n}{\log n}}$-szeres gyöke van.

6.6. Legyen $f \in C^2[0,N]$, $|f'(x)| < 1$ és $f'' > 0$. Bizonyítsd be, hogy legfeljebb $3N^{2/3}$ olyan egész szám van a $[0,N]$ intervallumban, ahol f értéke is egész.

6.7. Bizonyítandó, hogy tetszőleges $0 < a < 1$ és $0 < x < \pi$ esetén

$$\frac{\sin ax}{a \sin x} > e^{(1-a^2)x^2/6}.$$

6.8. (Írásban, angolul beadható.)

(a) Let A be an $n \times n$ symmetric, invertible matrix with real positive elements. Show that its inverse has at most $n^2 - 2n$ zero elements.

(b) How many zero elements are in the inverse of the$n \times n$ matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & \dots & \end{pmatrix}?$$