Matematika problémamegoldó szeminárium, 2019. március 26.

http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2019tav-prob/

7.1. Az A halmaz elemei pozitív egészek, és tetszőleges $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $|x - y| \geq \dfrac{xy}{25}$. Legfeljebb hány eleme lehet az A-nak?

7.2. Legyen $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ monoton csökkenő függvény, amelyre $\int_0^\infty f < \infty$. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x \to \infty} x f(x) = 0$.

7.3. Legyen R (nem feltétlenül kommutatív) gyűrű. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ egész számra tetszőleges $x \in R$ esetén $x^n = x$. Igazoljuk, hogy bármely $x, y \in R$-re $x^{n-1}y = yx^{n-1}$.

7.4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $p \geq 5$ prímszámra

$$\sum_{0<k<\frac{2}{3}p} \binom{p}{k}$$

osztható p^2-tel.

7.5. Legyenek A, B, C nemüres halmazok $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy A korlátos, C zárt és konvex, továbbá $A + B \subset A + C$. Igazoljuk, hogy $B \subset C$.

7.6. Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és definiáljuk a következő függvénysorozatot:

$$f_0 = f, \qquad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n.$$

Mutassuk meg, hogy ha minden n-re $f_n(1) = 0$, akkor minden $x \in [0, 1]$-re $f(x) = 0$.

7.7. Legyenek $u_1, u_2, \ldots, u_n$ folytonos $[0, 1]^n \to \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy tetszőleges i-re az u_i értéke nem függ az i-edik változótól. Igazoljuk, hogy

$$\left(\int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} u_i \right)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \int_{[0,1]^n} u_i^{n-1}.$$

7.8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a > 0$ valós szám esetén

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-ak^2} > 0.$$

7.9. (Írásban, angolul beadható.) Let $1 < a < 2$ be a real number.

(a) Show that there exists a unique sequence $x_1, x_2, \ldots$ of positive integers satisfying $x_{i+1} \geq x_i^2$ for all indices i and

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdots = a.$$

(b) Prove that inequality $x_{i+1} > x_i^2$ holds for infinitely many indices i if and only if a is irrational.