Matematika problémamegoldó szeminárium, 2019. április 2.

`http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2019tav-prob/`

8.1. Az A, B $n \times n$-es mátrixokra $AB + A + B = 0$. Igazoljuk, hogy $AB = BA$.

8.2. (a) Legyen $a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozat, amelyre $a_1 = 1$ és $a_{n+1} > \frac{3}{2}a_n$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$$

sorozatnak van (véges vagy végtelen) határértéke.

(b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\alpha > 1$-hez létezik $a_1, a_2, \ldots$ sorozat a fenti tulajdonságokkal úgy, hogy

$$\lim \frac{a_n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \alpha.$$

8.3. Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, amire $3A^3 = A^2 + A + I$. Mutassuk meg, hogy az A^k sorozat egy idempotens mátrixhoz konvergál.

8.4. Határozzuk meg az összes olyan (a, b) pozitív egészekből álló számpárt, amikre a poztív egészek halmaza felbontható valamely A, B diszjunkt halmazokra úgy, hogy $a \cdot A = b \cdot B$.

8.5. Legyen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Definiáljuk az f_n függvénysorozatot így:

$$f_0 = g, \qquad f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Határozzuk meg a függvénysorozat pontonkénti limeszét.

8.6.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + 3\cos^2(nx)} dx = ?$$

8.7. Legyen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^m$ úgy, hogy $x_1 + \cdots + x_k = 0$. Mutassuk meg, hogy az $1, 2, \ldots, k$ számoknak létezik olyan π permutációja, amelyre tetszőleges $1 \le n \le k$ esetén

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} \right\| \le \left(\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

($\|.\|$ az euklideszi normát jelenti.)

8.8. (Írásban, angolul beadható.) Let $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$ be non-zero elements of a field. We simultaneously replace each element with the sum of the 50 remaining ones. In this way we get a sequence $b_1, \ldots, b_{51}$. If this new sequence is a permutation of the original one, what can be the characteristic of the field?