Matematika problémamegoldó szeminárium, 2019. május 7.

`http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2019tav-prob/`

11.1. (a) Igaz-e. hogy minden $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijekcióra a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot f(n)}$ sor konvergens?

(b) Bizonyítsuk be, hogy van olyan $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijekció, amire a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+f(n)}$ sor konvergens.

11.2. Legyen a és b két, relatív prím pozitív egész. Melyik az a legkisebb pozitív egész, ami nem áll elő $ax+by$ alakban, alkalmas x,y pozitív egészekkel?

11.3. Legyen A és B két komplex mátrix, amelyekre $AB-BA=B^2$. Mutassuk meg, hogy $AB=BA$.

11.4. Igaz-e, hogy ha az $a_1,a_2,\dots$ valós sorozatban $(a_{n+1}-a_n)\to 0$ és $(a_{2n}-2a_n)\to 0$, akkor $a_n\to 0$?

11.5. Igazoljuk, hogy vannak olyan c_1 és c_2 pozitív számok, hogy

(a) minden $k>1$ valós számra $\displaystyle\left|\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{c_1}{k^{3/2}}$;

(b) minden $k>1$ valós számra $\displaystyle\left|\int_0^1\sqrt{1-x^2}\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right|>\frac{c_2}{k}$.

11.6. Legyen A és B két, egész számokból álló $n\times n$-es mátrix úgy, hogy az $A, A+B, A+2B,\dots,A+2nB$ mátrixok mind invertálhatóak, és az inverzeik is egész számokból állnak. Mutassuk meg, hogy ekkor az $A+(2n+1)B$ mátrix is invertálható, és az inverze egészekből áll.

11.7. Egy n pozitív egészt furcsának nevezünk, ha $\sigma(n)\geq 2n$ és n nem áll elő néhány különböző pozitív osztójának összegeként. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok furcsa szám van.

11.8. Bizonyítsuk be, hogy ha $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Lipschitz, akkor minden $\varepsilon>0$-hoz létezik téglalapoknak egy $T_1,T_2,\dots$ sorozata, amelyek lefedik f grafikonját, és a rövidebbik oldalaik összege kisebb, mint ε. (A téglalapok oldalai nem feltétlenül tengelypárhuzamosak.)

11.9. (Írásban, angolul beadható.) Suppose that we have a countable set A of balls and a unit cube in $\mathbb{R}^3$. Assume that for every finite subset B of A it is possible to put all balls of B into the cube in such a way that they have disjoint interiors. Show that it is possible to arrange all the balls in the cube so that all of them have pairwise disjoint interiors.