KFT jegyzetek, 2020 ősz

(Utolsó módosítás: 2021. április 8., 7:31)

Hivatkozások

[1] Halász Gábor: Bevezető komplex függvénytan (2002).

[2] Petruska György: komplex Függvénytan (Tankönyvkiadó, 1986).

[3] Bor Júlianna előadás-jegyzete (2015; feltöltöttem a Teamsbe.)

1. Komplex differenciálhatóság

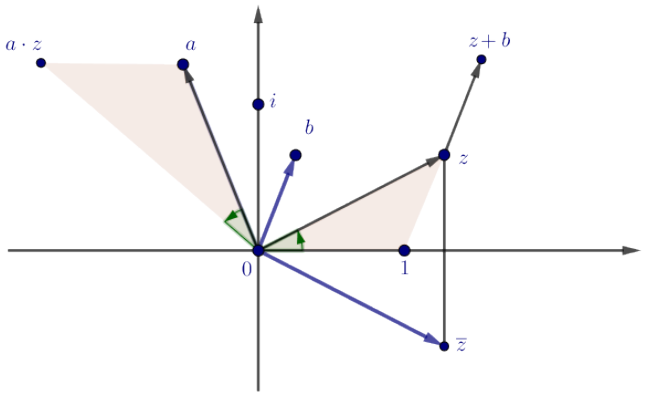
Komplex számok. Komplex sík. A komplex sík geometriai transzformációi. Határérték ∞-ben. Riemann-gömb. Komplex differenciálhatóság, geometriai jelentés. Cauchy–Riemann-egyenletek. Holomorf függvény. Egészfüggvény. Az inverzfüggvény differenciálási szabálya.

Komplex számok

Ezeket mind tudjuk algebrából, geometriából, esetleg középiskolából és versenyekről.

- A komplex számokat úgy kapjuk, hogy a valós számok testét bővítjük i-vel, ami az $x^2 = -1$ egyenlet gyöke, vagyis $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
- A z komplex szám algebrai alakja $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$; $x = \operatorname{Re} z$ és $y = \operatorname{Im} z$ a z valós, illletve képzetes része. (Tehát a képzetes rész is valós.)
- Az x, y betűket szeretjük fenntartani a valós és képzetes résznek, ezért komplex számok jelölésére inkább más betűket fogunk használni, főleg a z-t, de gyakran előfordul $z.w.\zeta, \xi, \omega$ stb.
- $\bar{z} = x - yi$ a z konjugáltja, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a z abszolút értéke vagy hossza, és persze $|z|^2 = z\bar{z}$.
- $z \neq 0$ kompex szám trigonometrikus alakja $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, ahol $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ a z argumentuma.
- Az argumentum csak modulo 2π egyértelmű; úgy is mondhatjuk, hogy a $(\mathbb{R}, +)/2\pi\mathbb{Z}$ faktorcsoportnak eleme.
- A trigonometrikus alakkal szép a szorzás, az osztás, az egész kitevős hatványozás és a gyökvonás, mert $\quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad$ és $\quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
- A két valós koordináta miatt a komplex számokat a sík ($\mathbb{R}^2$) pontjaival szeretjük azonosítani.
- A topológia a szokásos, ugyanaz, mint $\mathbb{R}^2$-ben:
  - környezetek, nyílt és zárt halmazok, összefüggőség
  - számsorozatok és sorok konvergencája
  - függvények határértéke, folytonosság, egyenletes folytonosság
  - függvénysorozatok és -sorok pontonkénti és egyenletes konvergencája, konvergenciakritériumok

Hasonlósági transzformációk

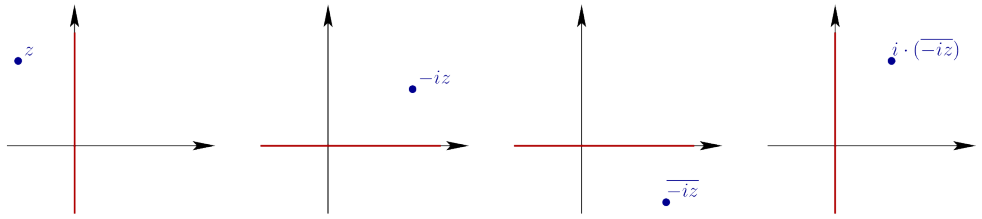


- $z \mapsto z + b$: eltolás a b vektorral
- $z \mapsto \overline{z}$: tükrözés a valós tengelyre
- $z \mapsto -z$ középpontos tükrözés a 0-ra
- $z \mapsto a \cdot z$ forgatva nyújtás a 0 körül; aránya $|a|$, szöge $\arg a$.
- ezek kombinációi:
  - $a \cdot z + b$ (irányítástartó)
  - $a \cdot \overline{z} + b$ (irányításváltó)

Példa

Írjuk fel képlettel a képzetes tengelyre való tükrözést.

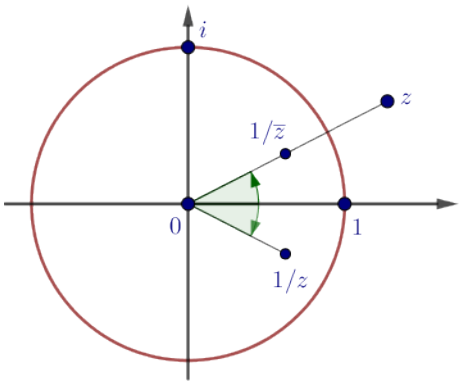
1. megoldás: A képzetes tengelyt a valós tengelyre forgatjuk, tükrözünk, visszaforgatunk:



$$z \quad \mapsto \quad -i \cdot z \quad \mapsto \quad \overline{-i \cdot z} \quad \mapsto \quad i \cdot (\overline{-i \cdot z}) = -\overline{z}.$$

2. megoldás: A képletet $f(z) = a\overline{z} + b$ alakban keressük. Két pont képe meghatározza a, b-t. Pl. $f(0) = 0$, $f(1) = -1$. Megoldva $a = -1$, $b = 0$, tehát $f(z) = -\overline{z}$.

Két fontos függvény: $1/\overline{z}$ **és** $1/z$

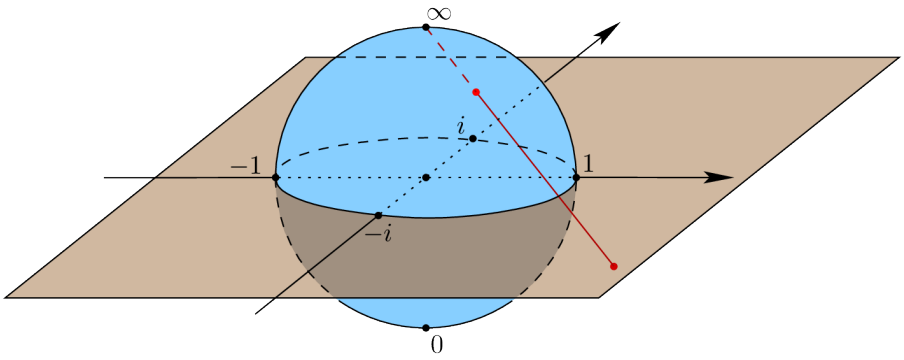


$$\left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\arg z, \qquad \arg\frac{1}{\overline{z}} = \arg z$$

- $\dfrac{1}{\overline{z}}$: inverzió az egységkörvonalra
- $\dfrac{1}{z}$: tükrözött inverzió

Riemann-gömb

A síkot 1 db, ∞ nevű ponttal kompaktifikáljuk. Nincs minden irányhoz külön végtelen, összesen csak egy végtelen van. $z \to \infty$ és $|z| \to \infty$ ugyanazt jelenti.



Elnevezések

- "tartomány": nemüres, összefüggő, nyílt része $\mathbb{C}$-nek
- "egységkör": $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
- "zárt egységkör": $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$
- "egységkörvonal": $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- "(egyváltozós) komplex függvény": $\mathbb{C}$ egy részhalmazáról képez $\mathbb{C}$-be

Komplex differenciálhatóság

Definíció

Tfh. f komplex függvény, $B(a, r_0) \subset D(f)$.

Az f differenciálható a-ban, ha $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ létezik és véges; a jele $f'(a)$.

A szokásos ekvivalens átírások:

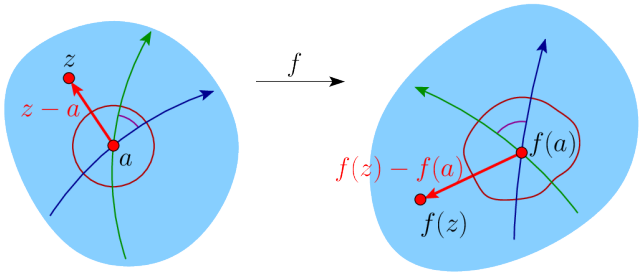
$$f(z) = f(a) + f'(a)\cdot(z-a) + o\big(|z-a|\big),$$
$$f(z) = f(a) + f'(a)\cdot(z-a) + \varepsilon(z)\cdot(z-a) \quad \text{vagy}$$
$$f(z) = f(a) + f'(a)\cdot(z-a) + \varepsilon(z)\cdot|z-a|$$

($\lim_a \varepsilon = 0$, vagy ε folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0$)

Triviális

Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

Geometriai jelentés, következmények



Feltéve, hogy $f'(a) \neq 0$:

$$f(z) - f(a) = \underbrace{f'(a) \cdot (z-a)}_{\text{forgatva nyújtás}} + \underbrace{\varepsilon \cdot |z-a|}_{\text{zaj}}$$

- szögtartó
- irányítástartó
- kicsiben körtartó (kicsi kör képe kicsi kb. kör)

Kicsi körvonal képe arányosan kicsi körvonal+zaj. Ha $f'(a) = 0$, akkor csak zaj...

Tétel (differenciálási szabályok)

A valós függvényekre tanult differenciálási szabályok komplexben is érvényesek:

- $c' = 0$, $z' = 1$
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- $f(g(z))' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

A bizonyítás betűről betűre ugyanaz, mint valósban.

Tétel (inverzfüggvény differenciálási szabálya, 0. változat)

Tfh. $f(z)$ differenciálható a-ban, $f(a) = b$, és $f'(a) \neq 0$;
$g(w)$ értelmes b egy környezetében, ott $f(g(w)) = w$, $g(b) = a$ és g folytonos b-ben.
Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Bizonyítás. A $z = g(w)$ helyettesítéssel, ha $w \to b$, akkor $z = g(w) \to g(b) = a$, $f(z) = f(g(w)) = w \to b = f(a)$,

$$\lim_{w \to b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \lim_{z \to a} \frac{z - a}{f(z) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Jó kérdés, hogy tényleg szükség van-e g folytonosságára, vagy csak az előadó ügyetlen.

Példa

Hol differenciálható az $f(z) = \overline{z}$ függvény?

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{z}-\overline{a}}{z-a} = ?$$

vagy,

$$z = a + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\text{-vel} \quad \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

a hossza egységnyi, az iránya 2φ, bármi lehet. Nincs határérték; $\overline{z}$ sehol sem differenciálható.

$\overline{z}$ nem is irányítástartó.
Két tükrözés együtt éppen visszafordítja az irányítást.

Hasznos trivialitás

Ha az $f(z)$ függvény differenciálható az a pontban, akkor a

$$g(w) = \overline{f(\overline{w})}$$

függvény differenciálható az $\overline{a}$ pontban és $g'(\overline{a}) = \overline{f'(a)}$.

Bizonyítás.

$$\lim_{w\to\overline{a}} \frac{g(w)-g(\overline{a})}{w-\overline{a}} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{f(z)}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{a}} = \lim_{z\to a} \overline{\left(\frac{f(z)-a}{z-a}\right)} = \overline{\lim_{z\to a} \frac{f(z)-a}{z-a}} = \overline{f'(a)}.$$

Mi a diff.hatóság definíciója, ha a függvényt kétváltozós, $\mathbb{R}^2$-be képező függvénynek tekintjük?

Tétel (Cauchy-Riemann egyenletek)

Legyen $f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)i$ (u, v valós értékűek).

Az f akkor és csak akkor differenciálható az $a+bi$ pontban, ha u és v valós értelemben differenciálható az (a,b) pontban,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$$

avagy, az $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ leképezés Jacobi-mátrixa az (a,b) pontban $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ alakú.

Bizonyítás. Elég $a = b = 0$-ra bizonyítani. ($r = \sqrt{x^2+y^2}$; $c, d \in \mathbb{R}$). Ezek ekvivalensek:

- $f'(0) = c + di = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- $f\big(x+yi\big) - f(0) = (c+di)(x+yi) + o(r)$
- $\big(u(x,y) + v(x,y)i\big) - \big(u(0,0)\big) + v(0,0)i\big) = (cx-dy) + (dx+cy)i + o(r)$
- $u(x,y) - u(0,0) = cx - dy + o(r)$ és $v(x,y) - v(0,0) = dx + cy + o(r)$
- u és v diffható $(0,0)$ pontban, $c = \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(0,0)$ és $d = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0)$

Definíció

- $f(z)$ az a pontban "holomorf", vagy "reguláris", ha az a egy környezetében differenciálható.
- $f(z)$ a D tartományon "holomorf", vagy "reguláris", ha D minden pontjában differenciálható.
- $f(z)$ "egészfüggvény", ha az egész síkon holomorf.
- $\mathcal{O}(D)$ a holomorf $D \to \mathbb{C}$ függvények rendszere (vektortere).

Következmény

Tegyük fel, hogy f holomorf a D tartományon.

Ha $\operatorname{Re} f$ vagy $\operatorname{Im} f$ konstans, vagy ha $f' \equiv 0$, akkor f konstans.

Bizonyítás. Legyen $f = u + vi$. Ha $u = \operatorname{Re} f$ vagy $v = \operatorname{Im} f$ konstans, akkor a Cauchy-Riemann egyenletek szerint $f' = u_x - u_y i \equiv 0$, illetve $f' = v_y + v_x i \equiv 0$.

Ha $f' \equiv 0$, akkor $f_x \equiv f_y \equiv 0$, így minden vízszintes és függőleges szakaszon f konstans. A D bármely két pontja összeköthető ilyen szakaszokkal.

Feladat

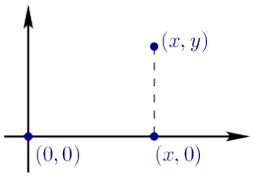
Legyen $u(x, y) = e^x \cos y$. Írjuk fel az összes olyan $v(x, y)$ függvényt, amelyre

$$x + yi \mapsto u(x, y) + v(x, y)i$$

egészfüggvény.

Megoldás: A Cauchy-Riemann egyeletekből

$$v_x = -u_y = e^x \sin y, \qquad v_y = u_x = e^x \cos y.$$



Legyen $C = v(0, 0)$.

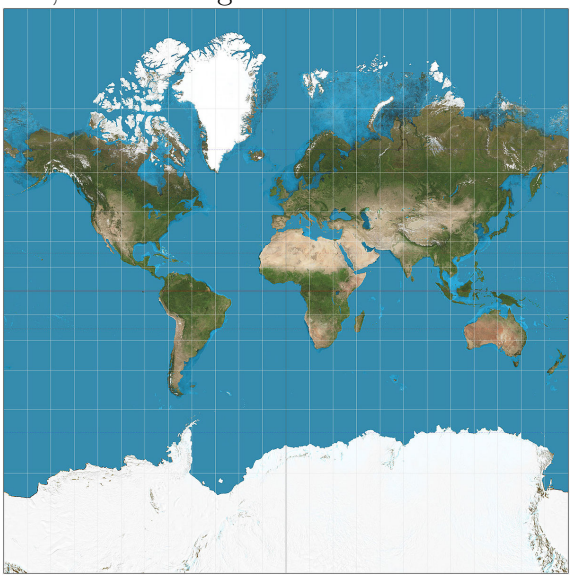
$$v(x, y) = v(0, 0) + \big(v(x, 0) - v(0, 0)\big) + \big(v(x, y) - v(x, 0)\big) =$$

$$= C + \int_0^x v_x(\xi, 0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y v_y(x, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta = C + \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y e^x \cos\zeta\,\mathrm{d}\zeta = C + e^x \sin y.$$

Ellenőrizni kell, hogy tényleg teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek.

Mercator-térképek

Nem egyenes- és nem aránytartó, viszont szög- és kicsiben körtartó.



Leképezés komplex függvényekkel

Egy Van Gogh képpel és a tülörképeivel kicsempézték a síkot, és alkalmaztak rá egy holomorf függvényt.

Leképezés komplex függvényekkel

Ugyanaz, csak Rembranttal (éjjeli őrjárat)

2. Hatványsorok

Hatványsor konvergenciája. Differenciálhatóság. Cauchy-Hadamard tétel. Taylor-együttható, egyértelműség. Analitikus függvények.

Hatványsorok

c körüli hatványsor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \qquad (c, a_n \in \mathbb{C}; \quad 0^0 = 1)$$

Példák

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ az egész síkon konvergens
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(z-2)^n$ csak a $z=2$ pontban konvergens
- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ az egységkör belsejében konvergens, a körvonalon és kívül divergens
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2}$ a -1 középpontú zárt egységkörlemezen konvergens, kívül divergens
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ a zárt egységkörlemezen konvergens, kivéve a $z=1$ pontot

Tétel

- A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergenciahalmaza egy c középpontú körlemez, a sugarát hívjuk a sor konvergenciasugarának. A konvergenciasugár lehet 0 és ∞ is.
- A körlemez belsejében a sor abszolút konvergens, külsejében divergens; a határon sokféle eset előfordulhat.
- Bármilyen, kisebb sugarú körlemezen a sor egyenletesen konvergens.

Ezt szeretjük, mert abszolút konvergens sorokkal mindenféle machinációt szabadon elkövethetünk, az egyenletes konvergencia pedig jól jön, ha majd integrálni akarunk.

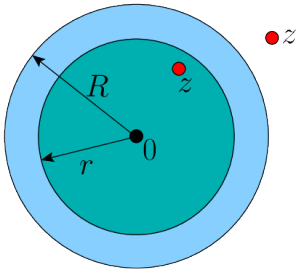
Cauchy–Hadamard tétel

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(Ha a lim sup értéke 0, akkor a konvergenciasugár végtelen.)

Bizonyítás. Elég $c = 0$-ra.



(a) Ha z az R sugarú körlemez külsejében van, vagyis $|z| > R$, akkor $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$. Emiatt végtelen sok olyan n index van, amelyre $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$. Az ilyen n-ekre $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| > 1$, tehát $|a_n z^n| > 1$. Akkor viszont a sor tagjai nem tartanak 0-hoz, a sor nem lehet konvergens.

(b) Válasszunk most egy tetszőleges $0 < r < R$ sugarat, és vizsgáljuk a sort az r sugarú zárt körlemezen. Legyen $\frac{1}{R} < m < \frac{1}{r}$.

Mivel $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < m$, elég nagy n esetén $\sqrt[n]{|a_n|} < m$. Akkor pedig bármely $z \leqslant r$-re $|a_n z^n| < m^n r^n = (mr)^n$, a hatványsor egyenletesen majorálható a $\sum (mr)^n$ konvergens mértani sorral. Tehát, a Weierstrass-kritérium szerint az r sugarú zárt körlemezen a sor egyenletesen abszolút konvergens.

Ez bármely $r < R$ esetén elmondható, tehát a sor a R sugarú kör belsejében abszolút konvergens.

Tétel

Tegyük fel, hogy az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara R.

(a) A tagonkénti deriváltakból álló $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}$ konvergenciasugara is R.

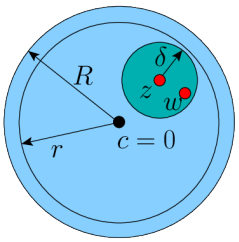
(b) A konvergenciakör belsejében f differenciálható.

(c) A konvergenciakör belsejében $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}$, vagyis szabad tagonként deriválni.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}.$$

Bizonyítás. (a): $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}$ konvergenciasugara ugyanaz, mint $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^n$ konvergenciasugara, ami

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\limsup \Big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \sqrt[n]{|a_n|} \Big)} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$



Bizonyítás. (b,c): Ismét $c = 0$; z tetszőleges pont a körön belül, és $|z| < r < R$.

Tudjuk, hogy az $\sum n|a_n| r^{n-1}$ sor konvergens.

Csak olyan w számokat fogunk használni, amelyekre $|w| < r$.

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w - z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \big(w^{n-1} + w^{n-2} z + \ldots + z^{n-1} \big). \qquad (*)$$

Az n-edik tag az $a_n \cdot n z^{n-1}$ számhoz tart. Jó lenne a szummát és a tagonkénti határértéket felcserélni.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ehhez van olyan N, hogy $\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Ezekhez van olyan $0 < \delta < r - |z|$, hogy $w \in B(z,\delta)$ és $1 \leqslant n \leqslant N$ esetén $\left|a_n\big(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1}\big) - na_n z^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2N}$, így

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1} - nz^{n-1}\Big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left|a_n\big(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1}\big) - na_n z^{n-1}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot 2nr^{n-1} < N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Alternatív befejezés:
A $(*)$ sort dominálja az $\sum n|a_n|r^{n-1}$ konvergens sor, mert $\left|a_n\big(w^{n-1} + \ldots + z^{n-1}\big)\right| \leqslant |a_n| \cdot nr^{n-1}$.
A dominált konvergencia tétel miatt az összeg és a $w \to z$ határérték felcserélhető:

$$\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{w\to z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\big(w^{n-1} + w^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}\big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w\to z}\Big(a_n\big(w^{n-1} + w^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}\big)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot nz^{n-1}.$$

Következmények

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

- $f(z)$ a konvergenciakör belsejében holomorf.
- $f(z)$ a konvergenciakör belsejében akárhányszor differenciálható.
- $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$.
- A hatványsor egyértelmű: Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ a c pont egy környezetében, akkor $a_n = b_n$ minden n-re.

Példa

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

Nézetre emelve:

$$f(z)^2 = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k$$

Deriválva:

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

Idézet

– Akarsz egy analízist hallani?
– Mi?... Ez megint olyan, mint az álomkór.
– Az analízis aprólékos elemzése valaminek, amit csak részleteiből érthetünk meg. Valaki nyomban a fivérem távozása után belépett Helena Aldingtonhoz. Ott találta Tom Leven kalapját, és leszúrta a nőt, tudva azt, hogy mindenki Tomot fogja gyanúsítani. Erről mi a véleményed?
– Szerintem az analízis olyan dolog, amit meg lehet fogni a gyilkos helyett, de nem lehet felakasztani. Hogy én is mondjak egy analízist: kinek állt érdekében elintézni a fivéredet, és megölni a nőt? Talán annak az embernek, aki a nő útján a fivéredtől ellopta a találmányt.
– Bravó! Ez nagyon jó analízis. Mindenesetre, ha tudnánk, hogy ki nyújtotta be azt a hasonló találmányt, talán közelebb járnánk az ügy megoldásához. Ha nem is ő ölte meg Helena Aldingtont, talán valaki, aki az ő személyével összefügg. Mi a véleményed?
— Hogy elég már az analízisen rágódni, menjünk inkább a büfébe.

(Rejtő: Elveszett cirkláló)

3. Elemi függvények

Exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények. A logaritmus és a hatványfüggvény értelmezésének problémái, többértékű függvény holomorf ága.

Elemi függvények definíciói

A valós hatványsorokat kiterjesztjük komplexre:

Definíció

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + - \dots$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} - \frac{z^9}{9!} + - \dots$$

Ezek az egész síkon konvergensek.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Tétel ($\exp z$ tulajdonságai)

(a) $(e^z)' = e^z$; (b) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$; (c) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Bizonyítás. (a,b) trivi a hatványsorból. (c):

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = e^z \cdot e^w.$$

Alternatív bizonyítás: Rögzítjük a $s = z + w$ számot. Legyen $f(z) = e^z \cdot e^{s-z}$.

$$f'(z) = (e^z \cdot e^{s-z})' = (e^z)' \cdot e^{s-z} + e^z \cdot (e^{s-z})' = e^z \cdot e^{s-z} + e^z \cdot (-e^{s-z}) = 0.$$

f konstans, $f(z) = f(0) = e^s$.

Tehát $e^z \cdot e^w = e^z \cdot e^{s-z} = e^s = e^{z+w}$.

Tétel

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$
- $e^{x+yi} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y); \qquad e^z \neq 0; \qquad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z \equiv \operatorname{Im} z \pmod{2\pi}$
- e^z periodikus $2\pi i$ szerint
- $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \cos(x+yi) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x + i \dfrac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x$
- $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \sin(x+yi) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$

- $\cos z$ és $\sin z$ periodikus 2π szerint
- $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$
- A megszokott trigonometrikus azonosságok érvényesek

Bizonyítás.

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \frac{(iz)^9}{9!} + \dots$$

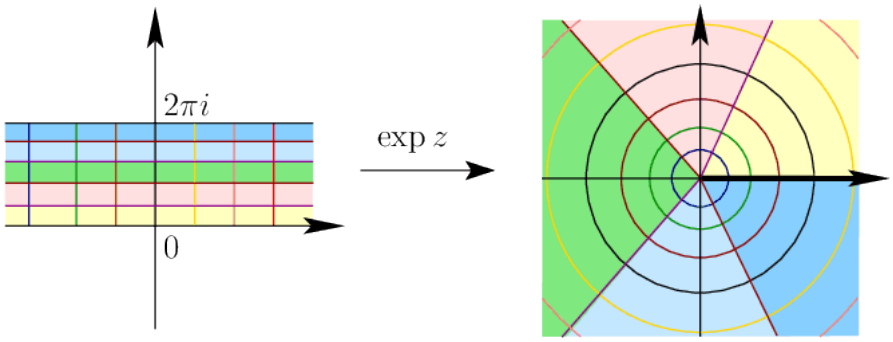
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - + \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - + \dots\right) = \cos z + i \sin z$$

Például

$$\cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w =$$
$$= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \cdot \frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2} - \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \cdot \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{2i} =$$
$$= \frac{(e^{zi} + e^{-zi})(e^{wi} + e^{-wi}) + (e^{zi} - e^{-zi})(e^{wi} - e^{-wi})}{4} =$$
$$= \frac{e^{(z+w)i} + e^{-(z+w)i}}{2} = \cos(z + w).$$

A többi azonosságot ugyanígy lehetne ellenőrizni.

Vízszintes egyenes képe félegyenes, függőleges egyenes képe kör, sáv képe szögtartomány



Határértékek, ha $y \to \pm\infty$

	$y \to +\infty$	$y \to -\infty$
$e^{iz} = e^{-y+xi}$	0	∞
$e^{-iz} = e^{y-xi} = \dfrac{1}{e^{iz}}$	∞	0
$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$	∞	∞
$\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$	∞	∞
$\operatorname{tg} z = -i\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = -i\dfrac{1-e^{-2iz}}{1+e^{-2iz}}$	i	$-i$
$\operatorname{ctg} z = i\dfrac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\dfrac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}$	$-i$	i

Komplex logaritmus?

Rózsaszínű álom

Olyan $\log z$ függvényt szeretnénk, amelyre $z \neq 0$ esetén

$$z = e^{\log z},$$

vagyis

$$|z| = \left|e^{\log z}\right| = e^{\operatorname{Re}\log z} \quad \text{és} \quad \arg z = \arg e^{\log z} = \operatorname{Im}\log z,$$

vagyis

$$\operatorname{Re}(\log z) = \underbrace{\log}_{\text{valós log}} |z| \quad \text{és} \quad \operatorname{Im}(\log z) = \arg z$$

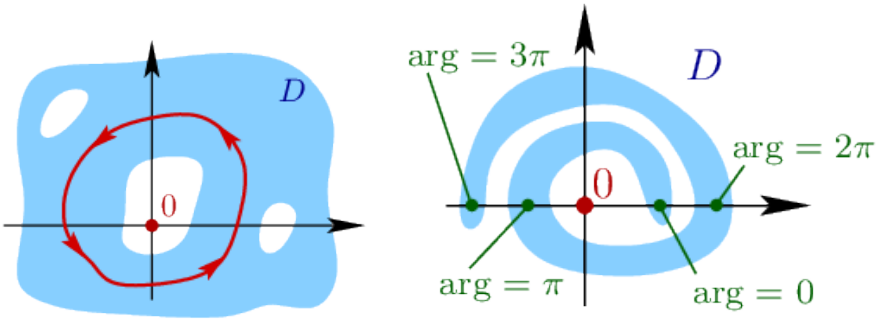
... öö ... és még differenciálható is legyen (de legalább folytonos).

Az argumentumot nem tudjuk folytonosan értelmezni az egész $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ síkon.

- Próbálkozhatunk többértékű függvénnyel, minden nemnulla számnak végtelen sok logaritmusa lesz
- Vagy minden számhoz csak egyetlen értéket választunk, de akkor cserébe nem minden számnak lesz logaritmusa.

Milyen D tartományokon létezik logaritmusfüggvény?

- Szemléletesen, ha a tartomány (vagy a tartományban egy zárt görbe) "megkerüli" a 0-t, akkor nem létezik $\arg z$-nek és $\log z$-nek folytonos ága D-n.
- Ha a tartomány "nem kerüli meg" a 0-t, akkor létezik D-n folytonos argumentum- és logaritmusfüggvény.

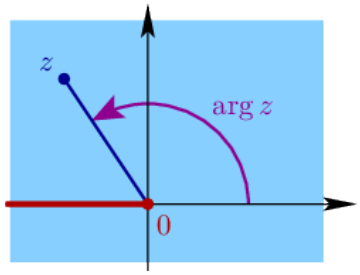


A jövő héten megvizsgáljuk precízebben.

Definíció

A logaritmus "főértéke": Nem értelmezzük a nempozitív valós helyeken.

$$\log z = \underbrace{\log}_{\text{valós log}} |z| + i \cdot \arg z, \qquad -\pi < \arg z < \pi$$



Tétel

Ha a D tartományon létezik a $\log z$-nek folytonos ága, akkor ez holomorf is, és $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$.

Bizonyítás. Legyen $b \in D$ tetszőleges és $a = \log b$. Az inverz függvény differenciálási szabálya működik: $e^a = b$, $\log b = a$, e^w diffható és a deriváltja nem 0, továbbá $\log z$ folytonos b-ben. Tehát,

$$(\log z)'\Big|_{z=b} = \frac{1}{(e^w)'\Big|_{w=a}} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{b}.$$

A logaritmus azonosságai

A valós számkörben érvényes $\log(ab) = \log a + \log b$ azonosság nem marad érvényes, hiszen magát a logaritmust is csak modulo $2\pi i$ értelemben ismerjük, tehát komplexben legfeljebb csak annyit mondhatunk, hogy

$$\log(ab) \equiv \log a + \log b \pmod{2\pi i}.$$

Amikor a logaritmus egy holomorf ágát vesszük egy speciális halmazon, akkor a végtelen sok lehetséges érték közül ragadunk ki egyet. Bármilyen logaritmus ágat (vagy ágakat) választunk is, lesznek olyan esetek, amikor $\log a$, $\log b$ és $\log(ab)$ közül valamelyik nem értelmezett, de még ha értelmesek is, akkor is lehetnek olyan a, b párok, amikor $\log(ab)$ és $\log a + \log b$ nem ugyanaz, hanem a különbségük $2\pi i$-nek valamilyen többszöröse.

Konkrét példák:

- Ha a logaritmus főértékét vesszük, akkor
  - a nempozitív helyeken nincs értelme a logaritmusnak, így például $\log(-1) = (\log i)^2$ baloldala nem értelmes;

  - például az $a = b = e^{2\pi i/3}$ esetben az argumentum "túlcsordul": $\log a + \log b = \frac{4\pi i}{3}$, míg $\log(ab) = -\frac{2\pi i}{3}$.

- Ha a logaritmus főértékéhez $100\pi i$-t hozzáadunk, az is egy logaritmus ág, és például $\log 1^2 = \log 1 + \log 1 - 100\pi i$.

Hatványozás? Mennyi legyen a^b?

$$a^b = \exp\big(b \cdot (\log a + k \cdot 2\pi i)\big) \quad ?$$

- Az egész kitevős hatványokkal nincs gond; ha $b \in \mathbb{Z}$, akkor $\log a$ minden értéke ugyanazt a hatvány értéket adja.

- Racionális, de nem egész kitevő esetén véges sok lehetséges érték lehet, például minden komplex számnak két négyzetgyöke van; irracionális kitevő esetén végtelen sok érték létezik.

- Fix alap esetén $\log a$ különböző értékei különböző $a^z = \exp\big(z \cdot \log a\big)$ függvényeket adnak.

- Megállapodás: ha a fix pozitív valós, akkor a valós értékű logaritmust vesszük, ezzel a valós exponenciális függvényeket terjesztjük ki.

- Ha egy tartományon létezik $\log f(z)$-nek holomorf ága, akkor a logaritmus mindegyik ágából kapunk egy-egy lehetséges $f(z)^{g(z)} = \exp\big(g(z) \cdot \log f(z)\big)$ függvényt, ezek közül választhatunk.

A hatványozás azonosságai

Rögzített alap esetén érvényben maradnak az $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$ és $a^{z-w} = a^z/a^w$ azonosságok, és ezek következményeként egész n számok esetén az $(a^z)^n = a^{nz}$ is, mert mindig ugyanannak az alapnak ugyanazt a logaritmusát vesszük:

$$a^{z+w} = e^{(z+w)\cdot\log a} = e^{z\cdot\log a + w)cdot\log a} = e^{z\cdot\log a} \cdot e^{w\cdot\log a} = a^z \cdot a^w$$

és

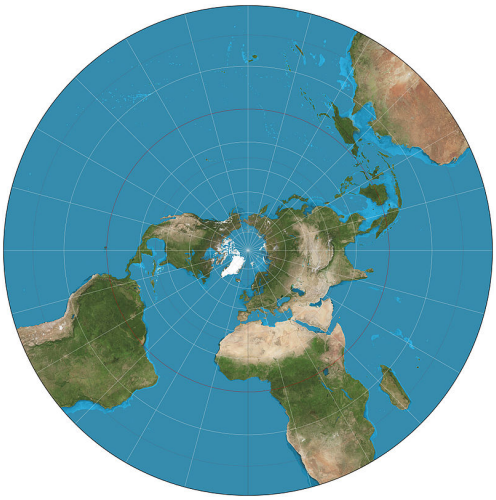
$$a^{z-w} = e^{(z-w)\cdot\log a} = e^{z\cdot\log a - w)cdot\log a} = \frac{e^{z\cdot\log a}}{e^{w\cdot\log a}} = \frac{a^z}{a^w}.$$

Pozitív valós alapok esetén az $(ab)^z = a^z \cdot b^z$ azonosság is érvényes marad, mert a megállapodásunk szerint mindhárom alapnak a valós logaritmusát használjuk, és ott érvényes a $\log(ab) = \log a + \log b$ azonosság:

$$(ab)^z = e^{z\cdot\log(ab)} = e^{z\cdot(\log a + \log b))} = e^{z\cdot\log a + z\cdot\log b)} = e^{z\cdot\log a} \cdot e^{z\cdot\log b)} = a^z \cdot b^z.$$

Vegyes komplex alapok, esetén óvatosan kell eljárnunk, a valósból ismert képletek csak akkor maradnak érvényesek, ha mindenhol a megfelelő logaritmusokat választjuk.

Mercator-térkép, újra



sztereografikus vetület a Déli sarkból (szög-, kör- és irányítástartó)

$$i \cdot \log z \longrightarrow$$

$$e^{-iz} \longleftarrow$$

Mercator-térkép

4. Komplex vonalintegrálok

Rektifikálható folytonos görbén vett folytonos függvény vonalintegrálja. Átírás Riemann-Stieltjes integrálokkal. Átírás Riemann-integrállá, ha a görbe folytonosan differenciálható. Átparaméterezés, additivitás, linearitás. Triviális felső becslés. Helyettesítéses integrálás. Newton-Leibniz formula.

Folytonos görbék

Lényegében ugyanúgy, mint $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció

- Görbe: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto x(t) + y(t)i, \qquad \dot{\gamma} = \dot{x} + \dot{y}i$
- Folytonos, diffható, folytonosan diffható stb., ha $\gamma(t)$, illetve $x(t)$ és $y(t)$ folytonos, diffható, folytonosan diffható stb.
- A görbe hossza a beírt töröttvonalak hosszának szuprémuma: $\ell(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}$. A görbe rektifikálható, ha a hossza véges
- Átparaméterezés: $h : [c,d] \to [a,b]$ szig. mon. növő bijekció; az új görbe $\gamma \circ h$
- A görbe megfordítása: $h : [c,d] \to [a,b]$ szig. mon. csökkenő bijekció; az új görbe $\gamma \circ h$

Trivi:

- Folytonos görbe átparaméterezései is folytonosak.
- A görbe hossza nem függ a paraméterezéstől.

Komplex vonalintegrál

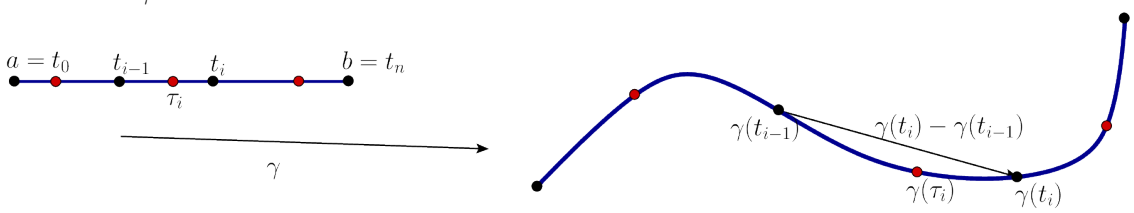
Defínció

Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ folytonos görbe,és $f(z)$ olyan komplex függvény, amely értelmes γ pontjain.

Az $f(z)$ függvény komplex vonalintegrálja a γ görbén az $I \in \mathbb{C}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy az $[a,b]$ paraméterintervallum bármely, δ-nál finomabb $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ felosztására és $\tau_j \in [t_{j=1}, t_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ paraméterértékekre

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - I \right| < \varepsilon.$$

Jele: $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, $\int_\gamma f$



Tétel

(a) Ha γ rektifikálható folytonos görbe, és f folytonos, akkor a $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ vonalintegrál létezik.

(b) Ha $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, és f folytonos, akkor $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t$.

Bizonyítás. Legyen $\gamma = x+yi$ és $f=u+vi$. (a) Az integráközelítő összeg

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\Big(u\big(\gamma(\tau_j)\big)+v\big(\gamma(\tau_j)i\Big)}_{f(\gamma(\tau_j))}\cdot\underbrace{\Big(\big(x(t_j)-x(t_{j-1})\big)+\big(y(t_j)-y(t_{j-1})\big)i\Big)}_{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})} =$$

$$= \sum_{j=1}^n u\big(\gamma(\tau_j)\big)\cdot\big(x(t_j)-x(t_{j-1})\big) + i\sum_{j=1}^n u\big(\gamma(\tau_j)\big)\cdot\big(y(t_j)-y(t_{j-1})\big)$$

$$+i\sum_{j=1}^n v\big(\gamma(\tau_j)\big)\cdot\big(x(t_j)-x(t_{j-1})\big) - \sum_{j=1}^n v\big(\gamma(\tau_j)\big)\cdot\big(y(t_j)-y(t_{j-1})\big).$$

Ez a négy összeg az $\int_a^b u(\gamma(t))\,\mathrm{d}x(t)$, az $\int_a^b u(\gamma(t))\,\mathrm{d}y(t)$, az $\int_a^b v(\gamma(t))\,\mathrm{d}x(t)$, illetve az $\int_a^b v(\gamma(t))\,\mathrm{d}y(t)$ Riemann-Stieltjes integrál egy-egy közelítő összege.

Az $u\circ\gamma$ stb. integrandusok folytonosak, a $x(t), y(t)$ integrátorok korlátos változásúak, tehát mind a négy RS integrál létezik.

Ha a felosztás elég finom, akkor mind a négy közetítő összeg $\varepsilon/4$-nél közelebb lesz a megfelelő RS integrálhoz. Tehát a vonalintegrál is létezik, és

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b u(\gamma(t))\,\mathrm{d}x(t) + i\int_a^b u(\gamma(t))\,\mathrm{d}y(t) + i\int_a^b v(\gamma(t))\,\mathrm{d}x(t) - \int_a^b v(\gamma(t))\,\mathrm{d}y(t).$$

(b) Ha $x(t)$ és $y(t)$ is szakaszonként folytonosan differenciálható, akkor mind a négy RS integrál átírható Riemann-integrállá, pl. $\int_a^b u(\gamma(t))\,\mathrm{d}x(t) = \int_a^b u(\gamma(t))\dot x(t)\,\mathrm{d}t$, és

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b u(\gamma(t))\dot x(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b u(\gamma(t))\dot y(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(\gamma(t))\dot x(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b v(\gamma(t))\dot y(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \Big(u(\gamma(t))+v(\gamma(t))i\Big)\cdot\Big(\dot x(t)+\dot y(t)i\Big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tétel

Ha γ_1 a γ egy átparaméterezése, akkor

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f.$$

(Ha az egyik létezik, akkor a másik is.)

Bizonyítás. Legyen $\gamma_1 = \gamma\circ h$, $h:[c,d]\to[a,b]$ szig. mon. növő, egyenletesen folytonos. Tegyük fel, hogy $\int_\gamma f$ létezik.

Vegyünk egy tetszőleges ε-t; ehhez létezik a definíciónak megfelelő δ. Ehhez a δ-hoz létezik $\eta>0$, hogy $u,v\in[c,d]$, $|u-v|<\eta$ esetén $|h(u)-h(v)|<\delta$.

Ha $c=u_0<u_1<\ldots<u_n=d$ egy η-nál finonabb felosztása $[c,d]$-nek, és $\upsilon_j\in[u_{j-1},u_j]$, akkor $a=t_0=h(u_0)<t_1=h(u_1)<\ldots<t_n=h(u_n)$ egy δ-nál finomabb felosztása $[a,b]$-nek, $\tau_j=h(\upsilon_j)\in[t_{j-1},t_j]$, és

$$\left|\sum_{j=1}^n f\big(\gamma_1(\upsilon_j)\big)\cdot\big(\gamma_1(u_j)-\gamma_1(u_{j-1})\big) - I\right| = \left|\sum_{j=1}^n f\big(\gamma(\tau_j)\big)\cdot\big(\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\big) - I\right| < \varepsilon.$$

Tétel

- Ha γ a γ_1 és γ_2 egymás után fűzése, akkor
$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_1} f.$$
(Ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is.)
- Ha γ_1 a γ-nak megfordítása, akkor $\int_{\gamma_1} f = -\int_\gamma f$.
- $\int_\gamma 1 \,\mathrm{d}z = \gamma(b) - \gamma(a)$
- Ha $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ és $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ létezik és c, d konstansok, akkor
$$\int_\gamma (c \cdot f(z) + d \cdot g(z))\,\mathrm{d}z = c \cdot \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + d \cdot \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. Ugyanaz, mint valós vonalintegráloknál.

Alternatív definíció

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ rektifikálható, folytonos

- $\mathrm{d}\gamma$ korlátos változású Lebesgue-Stieltjes mérték, a totális variációja $\ell(\gamma)$
- A vonalintegrál a $f \circ \gamma$ függvény LS integrálja a $\mathrm{d}\gamma$ mérték szerint.
- Minden Borel-mérhető függvénynek értelmes a vonalintegrálja
- A vonalintegrál lineáris
- A vonalintegrál additív

Lemma (triviális becslés)

Ha a görbe pontjaiban $|f(z)| \leqslant M$, akkor
$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M \cdot \ell(\gamma).$$

Bizonyítás. A becslés minden integrálközelítő összegre igaz:
$$\left|\sum_{j=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big|f\big(\gamma(\tau_j)\big)\Big| \cdot \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} M \cdot \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| = M \cdot \sum_{j=1}^{n} \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| \leqslant M \cdot \ell(\gamma).$$

Következmény

Legyen γ rektifikálható folytonos görbe; $f_1, f_2, \ldots$, a γ pontjaiban folytonos függvények.

- Ha $f_n \to g$ egyenletesen, akkor $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma g$.
- Ha $\sum f_n = g$ egyenletesen, akkor $\sum \int_\gamma f_n = \int_\gamma g$.

Bizonyítás. az egyenletes konvergencia miatt g is folytonos.
$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma g\right| = \left|\int_\gamma (f_n - g)\right| \leqslant \Big(\max_\gamma |f_n - g|\Big) \cdot \ell(\gamma) \to 0.$$

Miért szabad vonalintegrálokat felcserélni?

Előfordul, hogy valamilyen kétváltozós $f(z,w)$ függvényt mindkét változója a szerint vonalintegrálunk egy-egy görbén, és szükségünk van a két integrál felcserélésére:

$$\int_{z\in\gamma_1}\left(\int_{w\in\gamma_2} f(z,w)\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z \overset{?}{=} \int_{w\in\gamma_2}\left(\int_{z\in\gamma_1} f(z,w)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}w$$

Mindig folytonos függvényeket integrálunk rektifikálható görbéken. Ha mindkét görbe folytonosan differenciálható, (speciálisan ha mindkettő egyenes szakasz), $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C}$ és $\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{C}$, akkor az Analízis3-ból tanultak működnek: a lebontási tétel miatt

$$\begin{aligned}\int_{z\in\gamma_1}\left(\int_{w\in\gamma_2} f(z,w)\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z &= \int_{t=a}^{b}\left(\int_{u=c}^{d} f\big(\gamma_1(t),\gamma_2(u)\big)\dot\gamma_2(u)\,\mathrm{d}u\right)\dot\gamma_1(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{(t,u)\in[a,b]\times[c,d]} f\big((\gamma_1(t),\gamma_2(u)\big)\dot\gamma_1(t)\dot\gamma_2(u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

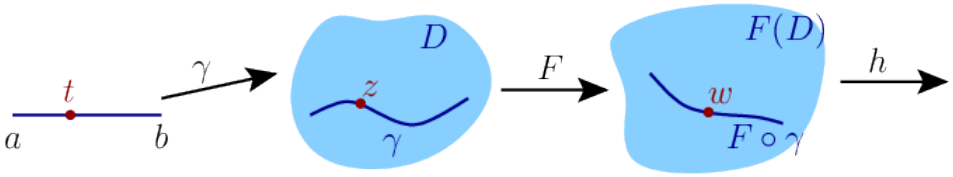
A lebontási tétel bizonyítását is meg lehetne ismételni Riemann- helyett vonalintegrálokkal.

A Fubini-tétellel, mint atomtöltetű ágyúval is le lehet lőni a kérdést. A rektifikálható görbe egyben (véges) komplex mértéktér is, a totális variáció az ívhossz, a vonalintegrál a komplex mérték szerinti integrál.

A Fubini-tételhez két dolgot kell ellenőriznünk: az integrandus, a $f(z,w)$ függvény mérhető és korlátos (mert folytonos), továbbá $|f|$-nek a totális variációk szerinti integrálja véges:

$$\int_{z\in\gamma_1}\left(\int_{w\in\gamma_2}\big|f(z,w)\big|\,|\mathrm{d}w|\right)|\,\mathrm{d}z| \leqslant \ell(\gamma_1)\cdot\ell(\gamma_2)\cdot\max\big|f(z,w)\big| < \infty.$$

Tétel (helyettesítéses integrálás)



Legyen $D\subset\mathbb{C}$ tartomány, $\gamma:[a,b]\to D$ rektifikálható folytonos görbe, $F:D\to\mathbb{C}$ folytonosan differenciálható, továbbá h az $F\circ\gamma$ pontjain folytonos függvény. Ekkor

- Az $F\circ\gamma$ görbe is rektifikálható, és
- $\displaystyle\int_{F\circ\gamma} h(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma} h(F(z))\cdot F'(z)\,\mathrm{d}z.$

Tétel (Newton–Leibniz formula komplex vonalintegrálokra)

Legyen $D\subset\mathbb{C}$ tartomány, $\gamma:[a,b]\to D$ rektifikálható folytonos görbe, $F:D\to\mathbb{C}$ folytonosan differenciálható. Ekkor

$$\int_{\gamma} F'(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

A NL formula a helyettesítéses integrálás speciális esete $h=1$-gyel.

Bizonyítás. Először ha γ szakaszonként folytonosan differenciálható:

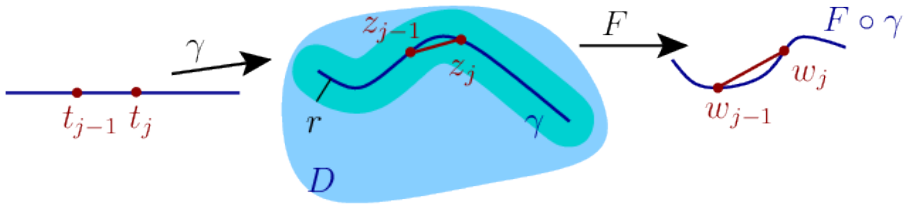
$$\int_{F\circ\gamma} h(w)\,\mathrm{d}w = \int_a^b h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)'\,\mathrm{d}t = \int_a^b h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot\Big(F'\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma h\big(F(z)\big)\cdot F'(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b\Big(h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot F'\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t,$$

ugyanaz.

Minden töröttvonalnak létezik szakaszonként folytonosan differenciálható paraméterezése, tehát a helyettesítéses integrálás képlete igaz töröttvonalakra is.

A γ-nak van egy olyan r sugarú zárt megvastagítása, amely teljes egészében D-be esik. Ez a megvastagítás kompakt, ezen F' és h egyenletesen folytonos és korlátos, $|F'|\leqslant M$ és $|h|\leqslant H$.



Most megmutatjuk, hogy $F\circ\gamma$ rektifikálható.

Vegyük $F\circ\gamma$ egy tetszőleges $(w_0,w_1,\dots,w_n)$ beírt poligonját; a csúcsok ősképei γ-nak egy $(z_0,z_1,\dots,z_n)$ beírt poligonját adják; véges sok további osztópont beszúrásával elérjük, hogy γ-t r-nél kisebb átmérőjű ívekre osszák.

Az $(F\circ\gamma)$-ba írt poligon oldalszakaszaira már felírhatjuk a tételt a $h=1$ függvénnyel:

$$\sum_{j=1}^n|w_j-w_{j-1}|=\sum_{j=1}^n\left|\int_{[w_{j-1},w_j]}1\,\mathrm{d}w\right|=\sum_{j=1}^n\left|\int_{[z_{j-1},z_j]}1\cdot F'(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\sum_{j=1}^n M\cdot|z_j-z_{j-1}|\leqslant M\cdot\ell(\gamma).$$

Tehát $F\circ\gamma$ tényleg rektifikálható. A $\int_{F\circ\gamma}h(w)\,\mathrm{d}w$ vonalintegrál is biztosan létezik.

A képlet bizonyítása: Vegyünk egy $\varepsilon>0$-t. Válasszuk a $t_0,\dots,t_n$ osztópontokat olyan sűrűn, hogy mindkét integrálhoz ε-nál közelebb legyen a megfelelő integrálközelítő összeg, és a γ egy-egy ívének konvex burkán belül F' megváltozása ε-nál kisebb legyen.

$$\left|\int_{F\circ\gamma}h(w)\,\mathrm{d}w-\int_\gamma h(F(z))F'(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{F\circ\gamma}h(w)\,\mathrm{d}w-\sum_{j=1}^n h(w_j)(w_j-w_{j-1})\right|+\left|\sum_{j=1}^n h(F(z_j))F'(z_j)(z_j-z_{j-1})-\int_\gamma h(F(z))F'(z)\,\mathrm{d}z\right|+$$

$$+\left|\sum_{j=1}^n\Big(h(w_j)(w_j-w_{j-1})-\underbrace{h(F(z_j))}_{h(w_j)}F'(z_j)(z_j-z_{j-1})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon+\varepsilon+\sum_{j=1}^n\big|h(w_j)\big|\cdot\Big|(w_j-w_{j-1})-F'(z_j)(z_j-z_{j-1})\Big|\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon+H\sum_{j=1}^n\left|\int_{[z_{j-1},z_j]}F'(z)\,\mathrm{d}z-\int_{[z_{j-1},z_j]}F'(z_j)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon+H\sum_{j=1}^n\left|\int_{[z_{j-1},z_j]}\Big(F'(z)-F'(z_j)\Big)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant 2\varepsilon+H\sum_{j=1}^n\varepsilon\cdot|z_j-z_{j-1}|\leqslant(2+H\ell(\gamma))\cdot\varepsilon.$$

Ez tetszőlegesen kicsi ε-ra igaz, tehát a két integrál egyenlő.

Példa

Integráljuk a $z \mapsto z$ függvényt az $y = x^2$ parabola 0 és $1 + i$ közötti ívén.

1. megoldás: Legyen $\gamma(t) = t + it^2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, akkor $\dot\gamma(t) = 1 + 2it$,

$$\int_\gamma z \,\mathrm{d}z = \int_0^1 (t + it^2)(1 + 2it) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t + 3it^2 - 2t^3) \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + it^3 - \frac{1}{2}t^4\right]_0^1 = i.$$

2. megoldás: Mivel $z = (\frac{1}{2}z^2)'$, a Newton–Leibniz formula szerint

$$\int_\gamma z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\gamma(1)^2 - \frac{1}{2}\gamma(0)^2 = \frac{1}{2}(1 + i)^2 - \frac{1}{2}0^2 = i.$$

Ívhossz szerinti integrál

Az ívhossz szerinti integrál ugyanaz, mint kétváltozós valósban, ezért nem definiáltuk külön.

Ha $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ elég sima görbe, akkor a szokásos átírás Riemann-integrállá

$$\int_\gamma f(z) |\,\mathrm{d}z| = \int_{t=a}^b = f(\gamma(t) \cdot \left|\dot\gamma(t)\right| \,\mathrm{d}t.$$

Ívhossz szerinti integrál az egységkörvonalon

Az egységkörvonal szokásos paraméterezése $z = \gamma(t) = e^{it}$; amikor a vonalintegrált és az ívhossz szerinti integrált átírjuk Riemann-integrállá,

$$\int_{|z|=1} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} f(e^{it}) \cdot ie^{it} \,\mathrm{d}t,$$

illetve

$$\int_{|z|=1} f(z) |\,\mathrm{d}z| = \int_\gamma f(z) |\,\mathrm{d}z| = \int_{t=0}^{2\pi} f(e^{it}) \,\mathrm{d}t;$$

ebből is leolvashatjuk a jelöléseket, hogy $\mathrm{d}t = |\,\mathrm{d}z|$ és $\mathrm{d}z = ie^{it} \,\mathrm{d}t = iz|\,\mathrm{d}z|$.

Geometriailag, amikor a körvonalon a z pontból a $z + \mathrm{d}z$ pontba lépünk, a $\mathrm{d}z$ iránya iz, a hossza $|\,\mathrm{d}z|$, vagyis

$$\mathrm{d}z = iz|\,\mathrm{d}z|, \qquad |\,\mathrm{d}z| = \frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Ezeket a képleteket akkor használhatjuk, amikor vonalintegrált akarunk ívhossz szerinti integrállá átírni vagy fordítva.

5. Cauchy-alaptétel

A primitív függvény létezésének kapcsolata a vonalintegrál eltűnésével. Goursat-lemma és általánosítása. Cauchy-alaptétel konvex, és csillagszerű tartományra. Holomorf függvénynek minden konvex/csillagszerű tartományon van primitív függvénye. Homotóp görbéken a vonalintegrál megegyezik. Példa arra, hogy nem egyszerű tartományon a Cauchy-alaptétel nem igaz.

A primitív függvény létezése

Tétel

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos. Ezek ekvivalensek:

(a) f-nek létezik primitív függvénye: valamilyen $F \in \mathcal{O}(D)$ függvénnyel $f = F'$.

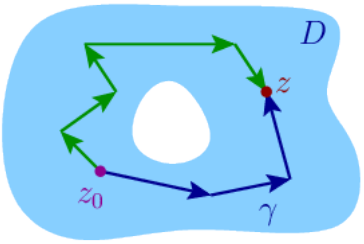
(b1) Közös végpontú, D-ben fekvő rektifikálható folytonos görbéken f vonalintegrálja egyenlő.

(b2) f komplex vonalintegrálja 0 minden D-beli zárt, rektifikálható folytonos görbén.

(c1) Közös végpontú, D-ben fekvő töröttvonalakon f vonalintegrálja egyenlő.

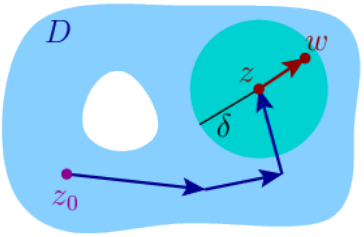
(c2) f vonalintegrálja 0 minden D-beli zárt töröttvonalon.

Bizonyítás. (a)$\Longrightarrow$(b): következik a Newton–Leibniz formulából.
(b)$\Longrightarrow$(c): trivi (minden TV egyben rektifikálható folytonos görbe is).
(c)$\Longrightarrow$(a): megismételjük a valós függvényeknél látott bizonyítást. Kijelölünk egy $z_0 \in D$ kezdőpontot, és F-et így definájuk: $F(z) = \int_\gamma f(w)\ \mathrm{d}w$, bármelyik z_0-t z-vel összekötő γ töröttvonalon. A (c) tulajdonság miatt a vonalintegrál értéke független a töröttvonaltól.
Azt kell még ellenőrizni, hogy tényleg $F'(z) = f(z)$.
Vegyünk egy tetszőleges $z \in D$ pontot. Azt fogjuk igazolni, hogy $F'(z) = f(z)$.



Legyen $\varepsilon > 0$ szintén tetszőleges.

Az f folytonos z-ben, tehát van olyan $\delta > 0$, hogy $B(z,\delta) \subset D$, továbbá minden $\zeta \in B(z,\delta)$-ra $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.



$0 < |w - z| < \delta$ esetén

$$F(w)-F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = \int_{[z,w]} f(z)\ \mathrm{d}\zeta + \int_{[z,w]} \big(f(\zeta)-f(z)\big)\ \mathrm{d}\zeta = f(z)(w-z) + \int_{[z,w]} \big(f(\zeta)-f(z)\big)\ \mathrm{d}\zeta$$

$$\Big|F(w) - F(z) - f(z)(w-z)\Big| = \left|\int_{[z,w]} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\ \mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \Big(\sup_{\zeta\in[z,w]} \big|f(\zeta) - f(z)\big|\Big) \cdot |w-z| \leqslant \varepsilon \cdot |w-z|$$

$$\left|\frac{F(w) - F(z)}{w-z} - f(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$

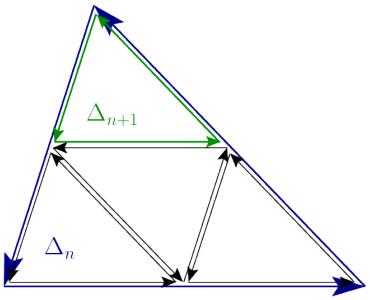
Tehát $\lim\limits_{w\to z} \dfrac{F(w) - F(z)}{w-z} = f(z)$; az F függvény differenciálható a z pontban és $F'(z) = f(z)$.

Ez minden $z \in D$ pontban igaz, tehát F primitív függvénye f-nek.

Holomorf függvény primitív függvénye

Goursat-lemma

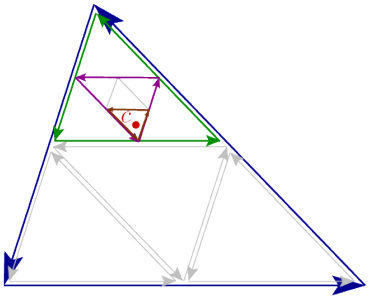
Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf.
Ha Δ irányított háromszögvonal, a belsejével együtt D-be esik, akkor $\int_\Delta f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.



Bizonyítás. Definiálunk egy $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ háromszögsorozatot. A Δ_n mentén a vonalintegrál $I_n = \int_{\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Az első háromszög maga a Δ: elem $\Delta_0 = \Delta$, és azt akarjuk igazolni, hogy $I_0 = 0$.

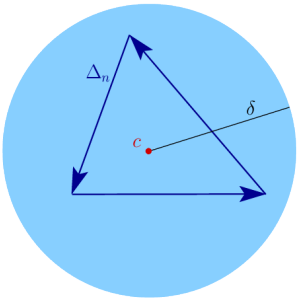
Ha Δ_n már megvan, akkor a középvonalakkal négyfelé osztjuk, és Δ_{n+1} az a negyed háromszög lesz, amelyen a vonalintegrál abszolút értéke a legnagyobb.



A négy integrál összege I_n, tehát $|I_{n+1}| \geqslant \dfrac{|I_n|}{4}$;
Indukcióval $|I_n| \geqslant \dfrac{|I_0|}{4^n}$, a Δ_n kerülete $\ell(\Delta_n) = \dfrac{\ell(\Delta)}{2^n}$.

Legyen c az a pont, amelyre a hármszögsorozat összehúzódik.

A f differenciálható a c pontban. Az $f(c) = a$ és $f'(c) = b$ számokkal a c közelében $f(z) \approx a + b(z-c)$.



Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t.
Mivel f differenciálható c-ben, van olyan $\delta > 0$, hogy a $B(c,\delta)$ körben

$$\big|f(z) - f(c) - f'(c)(z-c)\big| = \big|f(z) - a - b(z-c)\big| \leqslant \varepsilon \cdot |z-c|.$$

Vegyünk egy olyan nagy n-et, amelyre már $\Delta_n \subset B(c,\delta)$.

$$\frac{|I_0|}{4^n} \leqslant |I_n| = \left|\int_{\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_{\Delta_n} \underbrace{\big(a + b(z-c)\big)}_{\text{van primitív függvénye}}\,\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{\Delta_n} \big(f(z) - a - b(z-c)\big)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant$$

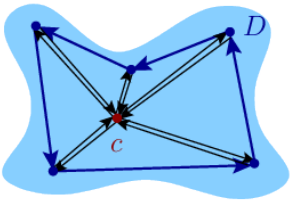
$$\leqslant 0 + \max_{z\in\Delta_n}\big|f(z) - a(z-c) + b\big| \cdot \ell(\Delta_n) < (\varepsilon \cdot \ell(\Delta_n)) \cdot \ell(\Delta_n) = \varepsilon \cdot \left(\frac{\ell(\Delta)}{2^n}\right)^2$$

$$|I_0| < \varepsilon \cdot \ell(\Delta)^2.$$

Ez minden ε-ra igaz, tehát $I_0 = 0$.

Következmények

Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf.



- Ha D csillagszerű (pl. konvex), akkor f integrálja 0 minden D-ben fekvő zárt töröttvonalon. Ha D csillagszerű, akkor f-nek létezik primitív függvénye.
- f-nek minden pont körül létezik lokális primitív függvénye.
- Közös végpontú homotóp rektifikálható görbéken f vonalintegrálja ugyanaz.

- Homotóp zárt rektifikálható görbéken f vonalintegrálja ugyanaz.
- Nullhomotóp rektifikálható zárt görbéken f vonalintegrálja 0.

Cauchy-tétel; Cauchy-féle integráltétel; Cauchy-alaptétel; a komplex analízis főtétele

Ha D egyszeresen összefüggő tartomány, és f holomorf D-n, akkor minden, D-ben fekvő rektifikálható folytonos zárt γ görbén $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Tétel

Ha D egyszeresen összefüggő tartomány, és f holomorf D-n, akkor f-nek létezik primitív függvénye.

Példa

Az $\dfrac{1}{z}$ függvény holomorf a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ tartományon, de a tartomány nem egyszeresen összefüggő.
Számítsuk ki a függvény vonalintegrálját az egységkörvonalon.

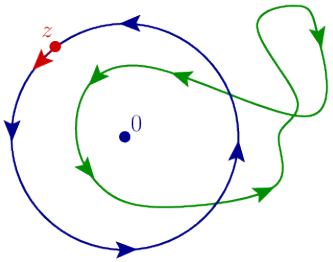
$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = ?$$

(Jelölés: $\int_{|z-c|=R}$ azt jelenti, hogy a pozitív irányítású körön integrálunk.)

A kör egy paraméterezése $z(t) = e^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$; $\dot{z} = ie^{it}$ avagy $\mathrm{d}z = ie^{it}\,\mathrm{d}t$;

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

(Ha létezne holomorf logaritmus a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ tartományon, akkor az integrál 0 lenne.)



Az irányított körvonallal homotóp görbéken az integrál ugyanez.

6. Cauchy-integrálformulák

Cauchy-formula körvonalon, konvex és csillagszerű tartományon. A deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula. Ha egy függvény egy nyílt halmazon egyszer differenciálható, akkor akárhányszor differenciálható. Görbe pontra vonatkozó indexe. Az index tulajdonságai. Az általános Cauchy-formula görbeindexszel (csak kimondani). A logaritmus létezése egyszeresen összefüggő tartományon.

Lemma

Bármely $c \in \mathbb{C}$ és $r > 0$ esetén

$$\int_{|z-c|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = 2\pi i.$$

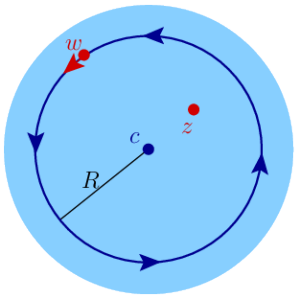
Bizonyítás. A körvonal egy paraméterezése $z(t) = c + re^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

$$\int_{|z-c|=r} \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)-c} \cdot \dot{z}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot rie^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Tétel (Cauchy-formula körlapra)

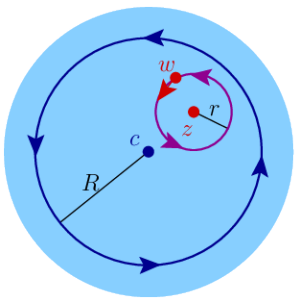
Legyen f holomorf a $B(c,R)$-nál valamivel nagyobb körlapon. Ekkor bármely, $z \in B(c,R)$ pontban

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$



Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ehhez van olyan $r > 0$, hogy $|w-z| \leqslant r$ esetén $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. A $|w-c| = R$ körvonal homotóp a $|w-z| = r$ körvonallal, így

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w =$$



$$= f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w =$$

$$= f(z) \cdot 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w;$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(z)-f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Ez minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, tehát $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z) \right| = 0$.

Tétel (deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula, körlapra)

Legyen f holomorf a $B(c,R)$-nál valamivel nagyobb körlapon. Ekkor $B(c,R)$ belsejében a körlapon akárhányszor differenciálható, és

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Formálisan

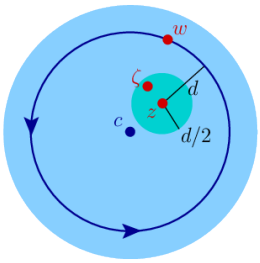
$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{f(w)}{w-z}\right)\mathrm{d}w =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{n!\cdot f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Bizonyítás. Indukció n szerint; $n = 0$-ra ez éppen a Cauchy-formula. Ha az állítás igaz n-re, akkor

$$f^{(n+1)}(z) = \lim_{\zeta\to z}\frac{f^{(n)}(\zeta)-f^{(n)}(z)}{\zeta-z} =$$
$$= \lim_{\zeta\to z}\frac{1}{\zeta-z}\left(\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}}\,\mathrm{d}w - \frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right) =$$
$$= \lim_{\zeta\to z}\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}(w-z)^{n+1}}\cdot\frac{(w-z)^{n+1}-(w-\zeta)^{n+1}}{\zeta-z}\,\mathrm{d}w =$$
$$= \lim_{\zeta\to z}\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}(w-z)^{n+1}}\cdot\Big((w-z)^n+(w-z)^{n-1}(w-\zeta)+\ldots+(w-\zeta)^n\Big)\,\mathrm{d}w.$$

$$f^{(n+1)}(z) = \lim_{\zeta\to z}\frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}(w-z)^{n+1}}\cdot\Big((w-z)^n+(w-z)^{n-1}(w-\zeta)+\ldots+(w-\zeta)^n\Big)\,\mathrm{d}w$$

körvonalon f folytonos, tehát korlátos. Ha z távolsága a körvonaltól d, akkor $\zeta \in B(z, \frac{d}{2})$ esetén $|w-\zeta| > \frac{d}{2}$, és az integrandus $\zeta \to z$ esetén egyenletesen tart a $\dfrac{f(w)}{(w-z)^{2n+2}}\cdot(n+1)(w-z)^n$ függvényhez.



(Az egyenletes határérték felcserélhető az összeadással és a szorzással, és reciprokkal is, ha a nevező limeszfüggvénye nem torlódik a 0-hoz.) Az egyenletes konvergencia miatt a limesz és az integrál felcserélhető:

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|w-c|=R}\lim_{\zeta\to z}\left(\frac{f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}(w-z)^{n+1}}\cdot\Big((w-z)^n+\ldots+(w-\zeta)^n\Big)\right)\mathrm{d}w =$$
$$= \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|w-c|=R}\lim_{\zeta\to z}\left(\frac{f(w)}{(w-z)^{2n+2}}\cdot(n+1)(w-z)^n\right)\mathrm{d}w = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_{|w-c|=R}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\,\mathrm{d}w.$$

Egy másik lehetőség a korlátos konvergencia tétel. A körvonalon $\mathrm{d}z$ véges LS mérték, $|\zeta-z| < \frac{d}{2}$ esetén az integrandus egyenletesen korlátos, így az integrál és a pontonkénti limesz felcserélhető.

(Utolsó lehetőségként (pl. vizsgán) hivatkozhatunk a Nagy Bivaly barátságára is.)

Következmények

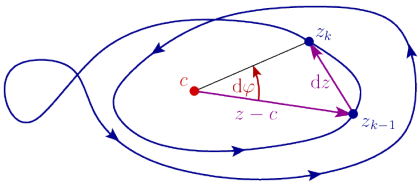
Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos.

- Ha f holomorf, akkor akárhányszor differenciálható.
- f akkor és csak akkor holomorf, ha lokálisan létezik primitív függvénye.
- Morera tétele: ha f-nek minden D-ben fekvő háromszöglemez kerülete mentén 0 a vonalintegrálja, akkor f holomof.

Definíció (görbe indexe)

Legyen γ rektifikálható, folytonos zárt görbe, és c egy olyan pont, amelyen γ nem megy át. A γ görbe c-re vonatkozó indexe, avagy c körüli körüljárási száma

$$n(\gamma, c) = \operatorname{ind}_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c}.$$



$$\mathrm{d}\big(\arg(z-c)\big) \approx \operatorname{Im} \frac{z+\mathrm{d}z-c}{z-c} = \operatorname{Im} \frac{\mathrm{d}z}{z-c}$$

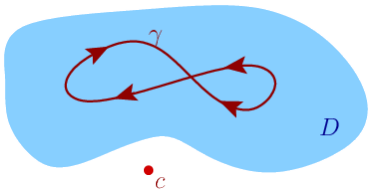
$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \log \frac{z_k-c}{z_{k-1}-c} = \Big(\log|z_k-c| - \log|z_{k-1}-c|\Big) + i \cdot \arg \frac{z_k-c}{z_{k-1}-c}$$

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Big(\log|z_k-c| - \log|z_{k-1}-c|\Big)}_{0} + i \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta\big(\arg(z-c)\big) = 2\pi i \cdot n(\gamma, c).$$

(Mostantól a $\dfrac{1}{2\pi i}$ kvázi az integráljel része...)

Görbeindex és egyszeres összefüggőség

Tétel



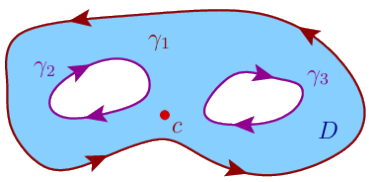
Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány. Ezek ekvivalensek:

(1) D egyszeresen összefüggő;

(2) Bármely $c \notin D$-re és D-beli rektifikálható, zárt folytonos γ görbére $n(\gamma, c) = 0$.

Az (1) $\Rightarrow$ (2) triviális. A (2) $\Rightarrow$ (1) irányt most nem bizonyítjuk.

Tétel

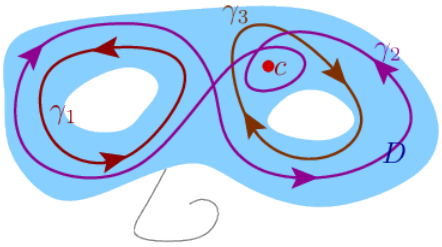


Ha a $D \subset \mathbb{C}$ korlátos tartományt a $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható görbék határolják, a külső határgörbe pozitív, a belső határgörbe negatív irányítású, akkor

(1) $c \in D$ esetén $\sum n(\gamma_j, c) = 1$

(2) $c \notin D$ esetén $\sum n(\gamma_j, c) = 0$.

Általános Cauchy-tétel



Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf, valamint $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható zárt görbék D-ben úgy, hogy bármely $c \in \mathbb{C} \backslash D$ pontra $\sum n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

Általános Cauchy-formula

Legyen D tartomány, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf, valamint $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható zárt görbék D-ben úgy, hogy bármely $c \in \mathbb{C} \backslash D$ pontra $\sum n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor bármely $z \in D$ esetén, amelyen nem mennek át ezek a görbék,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w = \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, z) \right) \cdot f(z).$$

A logaritmus létezése

Tétel

- Ha D egyszeresen összefüggő tartomány és $0 \notin D$, akkor létezik $\log z$-nek holomorf ága D-n.
- Ha D tartomány, $0 \notin D$, és bármely D-beli zárt görbe 0-ra vonatkozó indexe 0, akkor létezik $\log z$-nek holomorf ága D-n.

Bizonyítás. Az ötlet: Vegyük $1/z$ egy primitív függvényét.

Bármely D-beli zárt görbének a 0-ra vonatkozó indexe 0, tehát $1/z$ vonalintegrálja 0. Ezért $1/z$-nek létezik primitív függvénye D-n.

Válasszunk egy $z_0 \in D$ kezdőpontot, és egy olyan $L(z)$ függvényt, amelyre $L'(z) = \dfrac{1}{z}$ és $e^{L(z_0)} = z_0$ (az L-hez hozzáadhatunk egy konstanst).

Legyen $h(z) = z \cdot e^{-L(z)}$; ekkor tehát $h(z_0) = 1$,

$$h'(z) = \left(z \cdot e^{-L(z)} \right)' = e^{-L(z)} - z \cdot e^{-L(z)} \underbrace{L'(z)}_{1/z} = 0,$$

ezért h konstans 1, tehát $e^{L(z)} = z$; az $L(z)$ függvény a $\log z$-nek holomorf ága.

Tétel

Ha D egyszeresen összefüggő tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, és sehol sem 0, akkor létezik $\log f(z)$-nek holomorf ága D-n.

Bizonyítás. Ötlet: Ha létezik $\log f$, akkor a deriváltja $\dfrac{f'}{f}$. Vegyük ennek egy primitív függvényét.

Legyen $\ell(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$; ez holomorf D-n. A D egyszeresen összefüggő, tehát $\ell(z)$-nek létezik primitív függvénye. Vegyünk egy $z_0 \in D$ kezdőpontot, és válasszunk egy olyan $L(z)$ függvényt, amelyre $L' = \ell$ és $e^{L(z_0)} = f(z_0)$. Legyen $h(z) = f(z)e^{-L(z)}$ ekkor tehát $h(z_0) = 1$,

$$h'(z) = \Big(f(z)e^{-L(z)}\Big)' = f'(z)e^{-L(z)} - f(z)e^{-L(z)} \underbrace{L'(z)}_{f'/f} = 0,$$

ezért h konstans 1, tehát $e^{L(z)} = f(z)$; az $L(z)$ függvény a $\log f(z)$-nek holomorf ága.

Példa: Young-tétel szerűség

Ha $f(z,w)$ kétváltozós komplex függvény, folytonos az (a,b) egy környezetében, és mindkét változó szerint holomorf, akkor a $D_1D_2f(z,w)$ és $D_2D_1f(z,w)$ másodrendű parciális deriváltak léteznek és egyenlők.

Bizonyítás. a és b körül veszünk egy pici, r sugarú körvonalat. Ezeken belül Cauchy-formula w-re:

$$D_2f(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega-b|=r} \frac{f(z,\omega)}{(\omega-w)^2}\,\mathrm{d}\omega.$$

Ez z-ben holomorf, mert minden kis Δ háromszögön 0 az integrálja:

$$\int_\Delta \left(\int_{|\omega-b|=r} \frac{f(z,\omega)}{(\omega-w)^2}\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}z = \int_{|\omega-b|=r}\left(\int_\Delta f(z,\omega)\,\mathrm{d}z\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-w)^2} = \int_{|\omega-b|=r} 0\cdot\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-w)^2} = 0.$$

Most Cauchy-formula z-re:

$$D_1D_2f(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega-b|=r}\frac{f(\zeta,\omega)}{(\omega-w)^2}\,\mathrm{d}\omega}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\zeta-a|=r}\int_{|\omega-b|=r}\frac{f(\zeta,\omega)}{(\zeta-z)^2(\omega-w)^2}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\omega.$$

A $D_2D_1f(z,w)$-re ugyanez a képlet.

Pistikének mindenről

- Fel akarjuk írni egy függvény harmadik deriváltját? Integrálni kell.
- Igazolni akarjuk, hogy egy függvény holomorf? Integrálni kell.
- Meg akarjuk konstruálni a logaritmusfüggvényt? Integrálni kell.
- Meg akarjuk számolni, hogy egy görbe hányszor kerüli meg a nullát? Integrálni kell.
- Be akarjuk bizonyítani a Young-tételt? Integrálni kell.
- Hatványsorba akarunk fejteni egy függvényt? Integrálni kell. (jövő héten.)
- Meg akarjuk számolni, hogy egy egyenletnek hány megoldása van? Integrálni kell.
- Be akarjuk bizonyítani az implicitfüggvény-tételt? Integrálni kell.

Integrálokat csereberélni jó! :-)

7. Függvénysorozatok és paraméteres integrálok

Holomorf függvények lok. egyenletes limesze holomorf. Ugyanez sorokkal és paraméteres integrálokkal. Ha lokálisan egyenletesen korlátos függvények sorozata egy sűrű halmazon pontonként konvergens, akkor lok. egyenletesen konvergens. Vitali-Montel tétel.

Holomorf függvények egyenletes limesze

Tétel (Weierstrass)

Holomorf függvények lokálisan egyenletes limesze holomorf, avagy:

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és $f_n(z) \to g(z)$ lokálisan egyenletesen, akkor g holomorf és $f_n'(z) \to g'(z)$ lokálisan egyenletesen.

Emlékeztetőül, "lokálisan egyenletesen":

- Minden pontnak van olyan környezete, ahol, vagy:
- Minden kompakt részhalmazon.

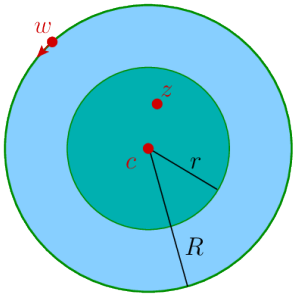
Következmény

Lokálisan egyenletesen konvergens sorozatokat és sorokat akárhányszor szabad tagonként deriválni.

Bizonyítás. (a) Morera: ahhoz, hogy $g(z) = \lim f_n(z)$ holomorf legyen, elég, ha g folytonos, és bármely D-beli Δ zárt háromszöglemez kerületén 0 a vonalintegrálja.

A Δ háromszöglemez kompakt, így ezen a halmazon $f_n \to g$ egyenletesen. Folytonos függvények egyenletes limesze folytonos, ezért g is folytonos; így biztosan létezik g vonalintegrálja a háromszögvonalon.

$$\int_\Delta g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Delta \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\int_\Delta f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$



(b) Legyen $\overline{B}(c,R) \subset D$, $0 < r < R$, $z \in B(c,r)$.
Bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $n > n_0$ esetén $\max\limits_{|w-c|=R} |f_n(w) - g(w)| < \varepsilon$.
Bármely $z \in B(c,r)$-re

$$\left|f_n'(z) - g'(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{g(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|w-c|=R} \frac{f_n(w)-g(w)}{\big((w-c)-(z-c)\big)^2}\,\mathrm{d}w\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|w-c|=R}\frac{\left|f_n(w)-g(w)\right|}{\big(|w-c|-|z-c|\big)^2}\,|\mathrm{d}w|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{(R-r)^2}\cdot 2\pi R = \frac{R}{(R-r)^2}\cdot\varepsilon.$$

Ez minden ε-ra igaz, tehát $f_n'(z) \to g'(z)$ egyenletesen a $B(c,r)$ körben.
Minden c-nek van olyan környezete, ahol $f_n \to g$ egyenletesen.

Példa: Riemann-zeta függvény

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(Hagyományosan $s = \sigma + it$)

Ha $\sigma_0 > 1$, akkor a $\sigma \geqslant \sigma_0$ félsíkban $\sum \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ közös konvergens majoráns, tehát a sor egyenletesen konvergens.

A Weierstrass-tétel szerint $\zeta(s)$ holomorf a $\sigma > 1$ nyílt félsíkban, és

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^s}.$$

($\sigma \leqslant 1$ esetén a sor divergens.)

Paraméteres integrálok

Tétel

Legyen D tartomány, $f : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ folytonos, minden rögzített $x \in [a,b]$-re $z \mapsto f(x,z)$ holomorf. Ekkor az

$$F(z) = \int_{x=a}^{b} f(x,z)\,\mathrm{d}x$$

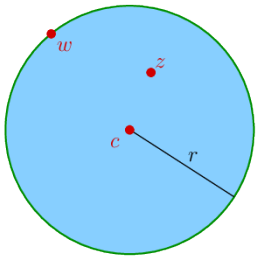
paraméteres integrál is holomorf és

$$F'(z) = \int_{x=a}^{b} D_2 f(x,z)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Ugyanaz, csak szumma helyett integrállal.
(a) Bármely $\Delta \subset D$ háromszöglemez körül

$$\int_{\Delta} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z\in\Delta} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{z\in\Delta} f(x,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} 0\,\mathrm{d}x = 0,$$

tehát $F(z)$ holomorf.
(b) Bármely $z \in D$ pont körül egy kis, r sugarú körben



$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} F(w) \frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,w)\,\mathrm{d}x \right) \frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2}$$

$$= \int_{x=a}^{b} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} f(x,w) \frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2} \right) \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} D_2 f(x,z)\,\mathrm{d}x.$$

Példa: az Euler-féle Gamma-függggvény

$$\Gamma(s) = \int_{x=0}^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

holomorf, és

$$\Gamma'(s) = \int_{x=0}^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \log x\,\mathrm{d}x \qquad (\mathrm{Re}\, s > 0)$$

Az előző tételt kiterjeszthetjük improprius integrálokra, vagy vehetjük a

$$\lim_{N\to\infty}\int_{x=\frac{1}{N}}^{N} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

lokálisan egyenletesen konvergens függvénysorozatot.

Pontonkénti konvergenciából egyenletes konvergencia

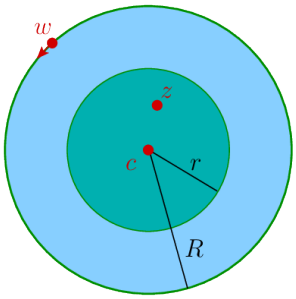
Lemma

Ha $D\subset\mathbb{C}$ tartomány, $f_1,f_2,\ldots:D\to\mathbb{C}$ holomorfak és egyenletesen korlátosak (tehát van olyan K, hogy $|f_n(z)|\leqslant K$ minden n-re és minden $z\in D$-re), és egy sűrű $S\subset D$ halmazon $f_n(z)$ pontonként konvergens, akkor az $f_n(z)$ sorozat lokálisan egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Vegyünk egy $c\in D$ pontot és körülötte egy kört: $B(c,R+\varepsilon)\subset D$.

Legyen $r=\frac{R}{2}$ és $|f_n(z)|\leqslant K$ minden n-re és z-re.

Előkészület. Bármely $z\in B(c,r)$-re és bármely $n\in N$-re



$$\left|f_n'(z)\right|\leqslant\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{K}{(R-r)^2}\cdot 2\pi R=\frac{4K}{R},$$

ezért bármely $z_1,z_2\in B(c,r)$ pontokra

$$\left|f_n(z_1)-f_n(z_2)\right|\leqslant\frac{4K}{R}\cdot|z_1-z_2|.$$

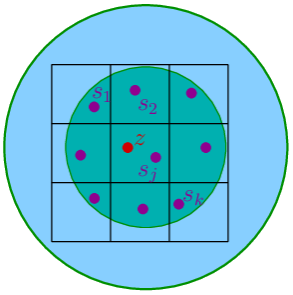
(A kis körön belül $f_1,f_2,\ldots$ egyenletesen Lipschitz.)

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges.

A $B(c,r)\cap S$ halmazból válasszunk ki véges sok pontot: $s_1,\ldots,s_k$-t úgy, hogy ezek ε sugarú környezetei lefedjék $B(c,r)$-et.

Van olyan n_0, hogy bármely $n,m\geqslant n_0$-ra és minden $1\leqslant j\leqslant k$-ra $\left|f_n(s_j)-f_m(s_j)\right|<\varepsilon$. (Mindegyik j-hez van ilyen küszöb; vesszük a maximumot.)

Most tekintsünk egy tetszőleges $z\in B(c,r)$ pontot.



Ehhez van egy s_j pont, amelyre $|z-s_j|<\varepsilon$. Ezért

$$\begin{gathered}\left|f_n(z)-f_m(z)\right|\leqslant\\ \leqslant\left|f_n(z)-f_n(s_j)\right|+\left|f_m(s_j)-f_m(z)\right|+\left|f_n(s_j)-f_m(s_j)\right|\leqslant\\ <\frac{4K}{R}|z-s_j|+\frac{4K}{R}|z-s_j|+\varepsilon<2\cdot\frac{4K}{R}\varepsilon+\varepsilon=\left(\frac{8K}{R}+1\right)\varepsilon.\end{gathered}$$

Tehát: Minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan n_0, hogy minden $n,m>n_0$ és bármely $z\in B(c,r)$ esetén $\left|f_n(z)-f_m(z)\right|\leqslant\left(\frac{8K}{R}+1\right)\varepsilon$.

Az $f_n(z)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens $B(c,r)$-en.

Tétel (Vitali–Montel)

Ha $D\subset\mathbb{C}$ tartomány, $f_1,f_2,\ldots:D\to\mathbb{C}$ holomorfak, és egyenletesen korlátosak, akkor ezek közül kiválasztható lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.

V.ö. Bolzano-Weierstrass tétel

Minden korlátos számsorozatnak van konvergens részsorozata.

V.ö. Arzelà–Ascoli tétel

Ha $f_1, f_2, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ egyenletesen korlátosak és egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall n \;\; \forall x, y \in [a,b] \;\; \Big(\big(|x-y| < \delta \big) \Rightarrow \big(|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \big) \Big),$$

akkor kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat.

Bizonyítás.. Legyen $s_1, s_2, \ldots$ egy sűrű sorozat D-ben.

A Bolzano–Weierstrass tétel miatt miatt van olyan $N_1 = (n_{1,1}, n_{1,2}, n_{1,3}, \ldots)$ sorozat, amelyre az $f_{n_{1,k}}(s_1)$ sorozat konvergens.

Ennek van olyan $N_2 = (n_{2,1}, n_{2,2}, n_{2,3}, \ldots)$ részsorozata, amelyre az $f_{n_{2,k}}(s_2)$ sorozat is konvergens.

Ezt ismételve kapjuk részsorozatok egy sorozatát; minden ℓ-re az $f_{n_{\ell,k}}(s_\ell)$ sorozat konvergens.

Átlósan kiválasztjuk az $n_{k,k}$ elemeket.

$$\begin{array}{lccccc}
N_1\colon & n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} & n_{1,4} & \ldots \\
N_2\colon & n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} & n_{2,4} & \ldots \\
N_3\colon & n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} & n_{3,4} & \ldots \\
N_4\colon & n_{4,1} & n_{4,2} & n_{4,3} & n_{4,4} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Az $(n_{1,1}, n_{2,2}, n_{3,3}, \ldots)$ sorozat mindegyik N_j-nek részsorozata az első néhány elem kivételével, ezért bármelyik ℓ-re az $f_{n_{k,k}}(s_\ell)$ sorozat konvergens.

Tehát, az $f_{n_{k,k}}(z)$ sorozat egyenletesen korlátos és az $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ sűrű halmazon pontonként konvergens, tehát a Lemma miatt a teljes D tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

8. Hatványsorba fejtés

Együtthatóformula. Hatványsorba fejtés. Középérték-tulajdonság. Parseval-formula hatványsorokra. $\log(1+z)$ és $(1+z)^a$ hatványsora.

Lemma

Bármely $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$ és $r > 0$ esetén

(a)
$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\,|\mathrm{d}z| = \begin{cases}1 & \text{ha } k=0\\ 0 & \text{ha } k\neq 0\end{cases}$$

(b)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k dz = \begin{cases}1 & \text{ha } k=-1\\ 0 & \text{ha } k\neq -1\end{cases}$$

Bizonyítás. A kettő ugyanaz, mert $\mathrm{d}\big(\arg(z-c)\big) = \dfrac{|\,\mathrm{d}z|}{r} = \dfrac{\mathrm{d}z}{i(z-c)}$. Helyettesítés: $z-c = re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

(a)
$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(re^{it})^k\cdot r\,\mathrm{d}t = \frac{r^k}{2\pi r}\int_0^{2\pi} re^{kit}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}1 & \text{ha } k=0\\ 0 & \text{hat } k\neq 0\end{cases}$$

(b)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(re^{it})^k\cdot ire^{it}dt = \frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(k+1)it}dt = \begin{cases}1 & \text{ha } k+1=0\\ 0 & \text{hat } k+1\neq 0\end{cases}$$

Vagy: $k \neq -1$ esetén van primitív függvény, a $\dfrac{z^{k+1}}{k+1}$. A $k=-1$ esetben $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\dfrac{\mathrm{d}z}{z-c} = 1$.

Tétel (együtthatóformula)

Ha a $B(c,R)$ körlapon
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,$$
akkor
$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}}\,\mathrm{d}w \qquad \text{minden } k\text{-ra és } 0<r<R\text{-re.}$$

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(w-c)^n}{(w-c)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(w-c)^{n-k-1}\right)\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}(w-c)^{n-k-1}\,\mathrm{d}w\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\left\{\begin{matrix}1 & \text{ha } n-k-1=-1\\ 0 & \text{ha } n-k-1\neq -1\end{matrix}\right\} = a_k.$$

Összehasonlítás: együtthatóformula, Cauchy-formula és Taylor-együttható

Ha a $B(c,R)$ körlapon

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,$$

akkor

$$a_k=\frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad \text{(Taylor-együttható)}$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(Együtthatóformula)}$$

$$\frac{f^{(k)}(c)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(Cauchy-formula)}$$

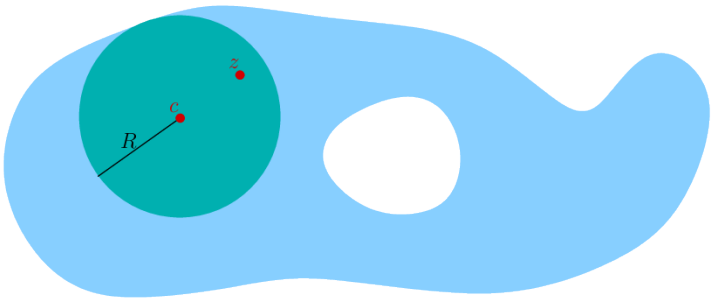
Tétel (hatványsorba fejtés)

Ha f holomorf a $B(c,R)$ körlapon, akkor ezen a körlapon a függvény hatványsorba fejthető,

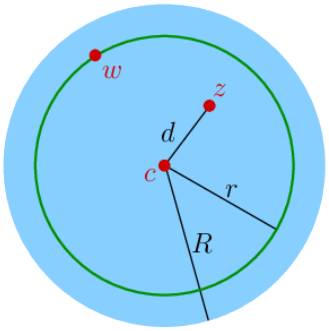
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,$$

ahol

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad \text{bármely } 0<r<R\text{-re.}$$



Bizonyítás. Legyen $z \in B(c,R)$, $d = |z-c| < r < R$, $M = \max\limits_{|w-c|=r} |f(w)|$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)-(z-c)}\,\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-c}{w-c}}\,\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n\right)\mathrm{d}w =$$

$\left|\dfrac{z-c}{w-c}\right| = \dfrac{d}{r} < 1$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\right)\mathrm{d}w$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right) =$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\max\limits_{w}\left|\dfrac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M}{r}\cdot\left(\dfrac{d}{r}\right)^n < \infty$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-c)^n.$$

Definíció

$f : D \to \mathbb{C}$ "analitikus", ha D bármely pontja körül valamekkora körben hatványsorba fejthető.

Következmény

$f : D \to \mathbb{C}$ akkor és csak akkor analitikus, ha holomorf.

Bizonyítás. $\Rightarrow$ A hatványsor összegfüggvénye holomorf.

$\Leftarrow$ Minden holomorf függvény bármely c pont körül hatványsorba fejthető, a maximális c közepű körlapon.

Tétel (középérték-tulajdonság)

Ha $f(z)$ holomorf a $\overline{B}(c,R)$ zárt körlapon (tehát holomorf egy kicsivel nagyobb körben), akkor

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z| = f(c)$$

vagyis $f(z)$ átlaga a körvonalon megegyezik a középpontban felvett értékkel.

Bizonyítás.. Legyen $f(z)$ c körüli hatványsora $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$.

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)|\mathrm{d}z| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}(z-c)^n\,|\mathrm{d}z|\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot\begin{Bmatrix}1 & \text{ha } n=0\\ 0 & \text{ha } n>0\end{Bmatrix} = a_0 = f(c).$$

Tétel (Parseval-formula hatványsorokra)

Ha $f(z)$ holomorf a $\overline{B}(0,r)$ zárt körlapon (tehát holomorf egy kicsivel nagyobb körben), és a 0 körüli hatványsora $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, akkor

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

Az $r=1$ esetben

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(e^{it})\right|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2.$$

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{it})\cdot\overline{f(re^{it})}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(re^{it})^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a_m}(re^{-it})^m\right)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_n\overline{a_m}r^{n+m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{(n-m)it}\,\mathrm{d}t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_n\overline{a_m}r^{n+m}\begin{Bmatrix}1 & \text{ha } n=m\\ 0 & \text{ha } n\neq m\end{Bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

Parseval-formula vs. Pitagorasz-tétel

Az egységkörvonalon

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}f\cdot\overline{g}\,|\mathrm{d}z|$$

egy skaláris szorzás, erre nézve

$$1,z,z^2,\dots,\frac{1}{z},\frac{1}{z^2},\dots$$

ortonormáltak.

Példa

$f(z)=\log(1+z)$ holomorf az egységkörben, $f(0)=0$,

$$f^{(k)}(z)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+z)^k},\qquad\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

a Taylor sor előállítja a függvényt az egységkörben:

$$\log(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k.$$

Következmény (binomiális sor)

Legyen $a\in\mathbb{C}$,

$$(1+z)^a=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}z^k\quad\text{ha }|z|<1$$

(Azt a hatványfüggvényt vesszük, amelyre $1^a=1$.)

Az $f(z)=(1+z)^a=e^{a\log(1+z)}$ függvény holomorf az egységkörben,

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!}=\frac{a(a-1)...(a-k+1)(1+z)^{a-k}}{k!}=\binom{a}{k}(1+z)^{a-k},\qquad\frac{f^k(0)}{k!}=\binom{a}{k};$$

A 0 körüli hatványsor

$$(1+z)^a=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}z^k\qquad(|z|<1).$$

Példa: IMO Shortlist 2006/A2

Definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozatot a következő rekurzióval:

$$a_0 = -1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{for} \quad n \geqslant 1.$$

Mutassuk meg, hogy $a_n > 0$ minden $n \geqslant 1$-re.

Gyors felső becslés: $|a_n| = \left| -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}|$; trivi indukcióval $|a_n| \leqslant 2^n$.

Legyen $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; ez $|z| < \frac{1}{2}$-re biztosan konvergens. A rekurzió azt jelenti, hogy

$$-1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} = G(z) \cdot \frac{-\log(1-z)}{z};$$

$$G(z) = \frac{z}{\log(1-z)}, \qquad G(0) = -1.$$

Ennek a függvénynek a hatványsora érdekel minket.

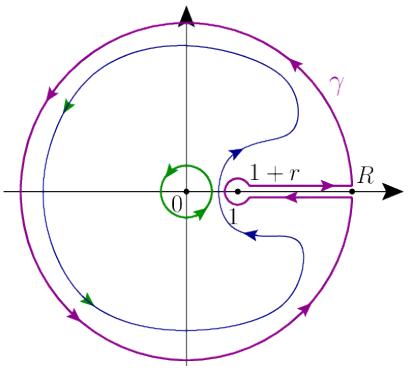
Megpróbálhatjuk kiszámolni a Taylor-együtthatókat... ehhez k-szor deriválni kell a 0-ban. (Hajrá.)

Vagy, írjuk fel inkább együtthatóformulát...

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{G(z)}{z^{n+1}}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^n \log(1-z)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^n \log(1-z)}$$

Kör helyett ezen a "kulcslyukgörbén" integrálunk:



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+r}^{R} \frac{dx}{x^n \big(\log(x-1) - \pi i\big)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{1+r}^{R} \frac{dx}{x^n \big(\log(x-1) + \pi i\big)}$$
$$+ O\left(r \cdot \log \frac{1}{r}\right) + O\left(R \cdot \frac{1}{R^n \log R}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+r}^{R} \frac{2\pi i \cdot \mathrm{d}x}{x^n \big(\log(x-1) - \pi i\big)\big(\log(x-1) + \pi i\big)} + O\left(r \cdot \log \frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{R^{n-1} \log R}\right)$$

$$= \int_{1+r}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^n \big(\log^2(x-1) + \pi^2\big)} + O\left(r \cdot \log \frac{1}{r}\right) + O\left(R \cdot \frac{1}{R^n \log R}\right)$$

Ha $r \to 0$ és $R \to \infty$:

$$a_n = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n \big(\pi^2 + \log^2(x-1)\big)} > 0.$$

9. A hatványsorba fejtés következményei

Gyöktényezők kiemelése, gyök multiplicitása. Unicitástétel. Lokális aszimptotikus viselkedés. Maximumelv.

Tétel (a gyöktényező kiemelhető)

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, a c körüli hatványsora $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$.

Ezek ekvivalensek:

(a) $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0$;

(b) $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$;

(c) $f(z) = (z-c)^m \cdot g(z)$ egy c-ben holomorf $g(z)$ függvénnyel.

Bizonyítás. $(a) \Leftrightarrow (b)$, mert $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$;

$(b) \Leftrightarrow (c)$ a $g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k(z-c)^{k-m}$ függvénnyel.

Definíció

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, a c körüli hatványsora $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$.

Azt mondjuk, hogy az $f(z)$-nek a c pont m-szeres gyöke, ha:

(a) $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0$ és $f^{(m)}(c) \neq 0$, avagy

(b) $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ és $a_m \neq 0$, avagy

(c) $f(z) = (z-c)^m \cdot g(z)$ egy c-ben holomorf $g(z)$ függvénnyel, és $g(c) \neq 0$.

Tétel (unicitástétel; unicitás=egyértelműség)

Legyen D tartomány, $f, g, h : D \to \mathbb{C}$ holomorf, $z_1, z_2, \ldots \in D$ olyan konvergens sorozat, hogy $z_n \to \zeta \in D$ és $z_n \neq \zeta$.

(a) Ha $f(z_n) = 0$ minden n-re, akkor f az egész D-n konstans 0.

(b) Ha $g(z_n) = h(z_n)$ minden n-re, akkor $g = h$ az egész D-n.

Avagy, a függvény értékei bármelyik, D belsejében torlódó sorozat mentén meghatározzák a függvényt; bármely értéksorozathoz legfeljebb egy függvény létezik.

Bizonyítás. Elég az (a) állítást igazolni, ebből a (b) állítás az $f = g - h$ választással következik.

Legyen $Z = \{w \in D : f(w) = 0\}$ az f gyökeinek halmaza;
$Z_1 = Z' \cap D$, a gyökök D-beli torlódási pontjainak halmaza.
A feltétel szerint $\lim z_n \in Z_1$, tehát Z_1 nemüres.

Az f folytonos, ezért a gyökök torlódási pontjai is gyökök: ha $w_1, w_2, \ldots$ gyökök és $\lim_{n\to\infty} w_n \in D$, akkor

$$f\big(\lim_{n\to\infty} w_n\big) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ezért $Z_1 \subset Z$.

A Z_1 halmaz D-ben relatív zárt, mert Z' zárt (torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont).

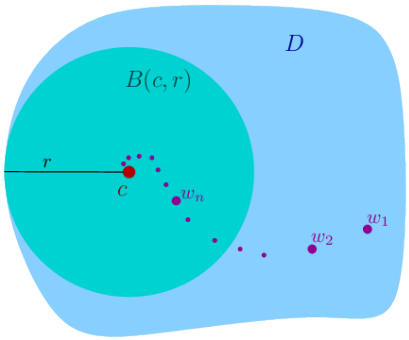
Meg fogjuk mutatni, hogy Z_1 nyílt is.

Állítás: Z_1 nyílt, vagyis $\forall c \in Z_1\ \exists r > 0\ B(c,r) \subset Z_1$.

Vegyünk egy tetszőleges $c \in Z_1$ pontot; a c körül a maximális $B(c,r)$ körben legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$.

Azt akarjuk igazolni, hogy $a_0 = a_1 = \ldots = 0$; ha ez igaz, akkor $B(c,r)$-ben f konstans 0, a körben minden pont gyök, és minden pont gyökök torlódási pontja, és így $B(c,r) \subset Z_1$.

Indukció. Legyen a_m az első olyan együttható, amiről még nem bizonyítottuk, hogy 0, tehát $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ már megvan, és vizsgáljuk a_m-et. (Ha $m = 0$, akkor a feltétel üres.)



Mivel c torlódási pontja Z-nek, vannak olyan $w_1, w_2, \ldots \in Z$ pontok, hogy $w_n \neq c$ és $w_n \to c$.

A $g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-c)^{k-m} = \dfrac{f(z)}{(z-c)^m}$ függvény szintén holomorf a $B(c,r)$ körben, folytonos c-ben, és $g(w_n) = \dfrac{f(w_n)}{(w_n - c)^m} = 0$.

Tehát,

$$a_m = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(w_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ezek után Z_1 az összefüggő nyílt D-nek nemüres, egyszerre nyílt és relatív zárt része, tehát a teljes D, de akkor $D = Z_1 \subset Z \subset D$ miatt $Z = D$, vagyis f konstans 0.

Következmény (végtelen rendben eltűnő függvény)

Legyen $f(z)$ holomorf a D tartományon.

Ha valamely pontban $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = 0$, akkor f konstans 0.

Bizonyítás. Ha $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = 0$, akkor f c körüli hatványsora a konstans 0; a konvergenciakörben, majd a teljes tartományon a függvény konstans 0.

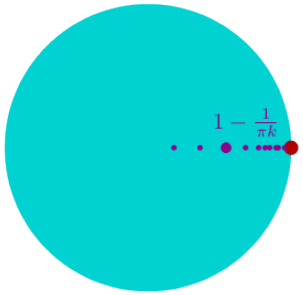
Következmény

Ha $f(z)$ holomorf, nem konstans a D tartományon, akkor az f minden gyökének véges a multiplicitása.

Példa

Legyen az egységkörben $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$.

A függvény gyökei $1 - \dfrac{1}{k\pi}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.



Miért nem mond ez ellent az unicitástételnek?

Válasz: Végtelen sok gyök van, de csak a határhoz torlódnak.

Azonosságok, még egyszer

Az unicitástétel segítségével bizonyítás nélkül átvihetjük a valósból imsert azonosságokat komplexre.

Például a valós számok körében $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$; ez automatikusan érvényes marad a komplex számok körében is; az egyetlen apró technikai gond, hogy itt kétváltozós komplex függvényekről van szó. Ezen úgy segíthetünk, hogy két lépésben, egyesével cseréljük a valós váltókat komplexre.

Először rögzítsük az x valós számot, az y helyére írjuk a w komplex változót és tekintsük az

$$\sin(x+w) \stackrel{?}{=} \sin x \cos w + \cos x \sin w \tag{1}$$

egyenletet. Mindkét oldalon a w változó egy-egy egészfüggvénye áll, és az w valós értékeire az egyenlet teljesül. A valós w értékek persze torlódnak a sík belsejében, tehát az unicitástétel szerint a két függvény ugyanaz; az (1) egyenlet minden komplex w-re teljesül.

Most pedig rögzítsük a w komplex számot, és cseréljük ki az eddigi valós x-et egy z komplex változóra:

$$\sin(z+w) \stackrel{?}{=} \sin z \cos w + \cos z \sin w. \tag{2}$$

Most is a két oldal egy-egy egészfüggvénye z-nek, és láttuk, hogy a két oldal egyenlő a z bármely valós értéke esetén. Az unicitástételt újra alkalmazva azt kaptuk, hogy a (2) minden komplex z-re igaz.

Érdemes elgondolkodni azon, hogy ez a módszer mennyiben használható a logaritmus és az exponenciális függvények esetében. A logaritmus esetében maga a függvény létezése a gond, a $\log(zw) = \log z + \log w$ egyenletet nem tudjuk elég sok z, w párra értelmezni.

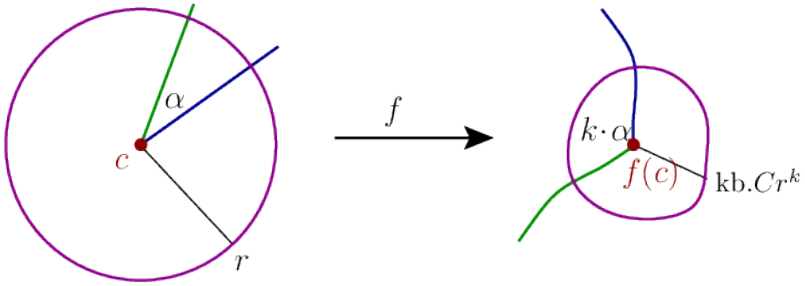
Lokális aszimptotikus viselkedés

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0$ és $f^{(k)}(c) \neq 0$.

A hatványsorba fejtés miatt a c közelében

$$f(z) - f(c) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \cdot (z-c)^k + O\big(|z-c|^{k+1}\big),$$

tehát a függvény kicsiben körtartó, de nem szögtartó: a c csúcsú szögeket k-val megszorozza.



Tétel (maximum-elv)

Ha $f(z)$ holomorf, nem konstans a D tartományon, akkor:

(a) $\big|f(z)\big|$-nek nem létezik lokális maximuma.

(b1) Ha $z_1, z_2, \ldots \in D$, $\lim z_n = w$, és $|f(z_n)| \to \sup |f|$, akkor w a D határán van.

(b2) Ha D korlátos, és f folytonos a D lezártján, akkor $|f|$ a maximumát csak a határon veszi fel.

Bizonyítás. Ha $c \in D$, és $\overline{B}(c,r) \subset D$, akkor a középérték-tulajdonság szerint

$$f(c) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z|;$$

$$\big|f(c)\big| = \left|\frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z|\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} \big|f(z)\big| \cdot |\mathrm{d}z| \leqslant \max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|.$$

Egyenlőség csak akkor lehetne, ha f iránya és nagysága is állandó lenne a körvonalon; de akkor az unicitástétel miatt f konstans lenne.

Tehát, akármilyen kicsi r-re

$$\big|f(c)\big| < \max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|;$$

az $|f|$-nek nem lehet lokális maximuma c-ben.

Ugyanez Parseval-formulával:

Legyen c körül $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$.

Mivel f nem konstans, az $a_1, a_2, \ldots$ együtthatók nem mind nullák.

$$|f(c)|^2 = |a_0|^2 < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|f(c + re^{it})\big|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \Big(\max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|\Big)^2,$$

tehát

$$|f(c)| < \max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|.$$

Van-e minimum-elv?

- Ha $f(c) = 0$, akkor $|f(z)|$-nek c lokális minimumhelye.
- Ha $f(c) \neq 0$, és c az $|f(z)|$-nek lokális minimumhelye, akkor c az $|1/f(z)|$-nek lokális maximumhelye, tehát f konstans.

Ha f-nek nincs gyöke, akkor van minimum-elv is.

Tétel (Schwarz-lemma)

Ha $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorf és $f(0) = 0$, akkor

(a) $|f'(0)| \leqslant 1$;

(b) $z \neq 0$ esetén $|f(z)| \leqslant |z|$;

(c) Ha az fentiekben egyetlen pontban is egyenlőség van, akkor $f(z)$ egy 0 körüli forgatás: $f(z) = cz$ valamilyen $|c| = 1$-gyel.

Bizonyítás. Az f-nek a 0 gyöke, tehát $f(z) = g(z) \cdot z$ valamilyen holomorf g függvénnyel.

A 0-ban $f'(0) = g(0)$; azt kell igazolni, hogy $|g| \leqslant 1$.

Legyen $z_1, z_2, \ldots \in \mathbb{D}$ olyan pontok, hogy $|g(z_n)| \to \sup |g|$. Ha g nem konstans, akkor a maximum-elv miatt $|z_n| \to 1$. Ha g konstans, akkor mi választjuk a pontokat így.

$$1 \geqslant |f(z_n)| = |g(z_n)| \cdot |z_n| \to \sup |g| \cdot 1 = \sup |g|$$

Tehát az egész körlapon $|g| \leqslant 1$.

Ha (a)-ban vagy (b)-ben, bármelyik belső pontban egyenlőség van, akkor ott $|g| = 1$. Az maximum-elv szerint ez csak úgy lehet, ha g konstans, $g(z) = c$; ez a konstans persze egységnyi, és akkor $f(z) = cz$ egy forgatás.

10. Egészfüggvények

Együtthatóbecslés. Liouville-tétel. Nem konstans egészfüggvény értékkészlete sűrű. Kis Picard-tétel (csak kimondani). A polinomok jellemzése nagyságrendekkel. Bizonyítás az algebra alaptételére.

Lemma (együtthatóbecslés)

Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ egészfüggvény, és bármely $r > 0$-ra $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Ekkor

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

Bizonyítás. Együtthatóformula, majd triviális becslés:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \max_{|z|=r} \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}.$$

Vagy, a Parseval-formulából:

$$|a_n|^2 r^{2n} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t \leqslant M(r)^2$$

Tehát $|a_n| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$.

Tétel (Liouville-tétel)

Ha egy egészfüggvény korlátos, akkor konstans.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a korlát $|f(z)| \leqslant M$.

Az együtthatóbecslés szerint $r > 0$-ra és $n \geqslant 1$-re

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

Az $r \to \infty$ határátmenetből azt kapjuk, hogy $|a_n| = 0$ minden $n \geqslant 1$-re, tehát f konstans.

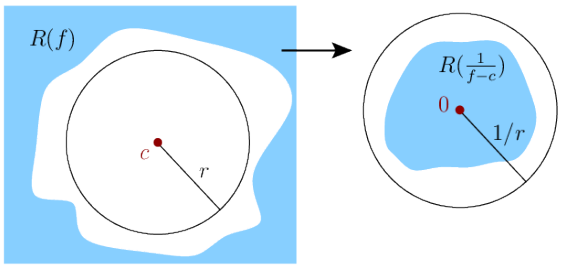
Következmény

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor az értékkészlete sűrű $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy az értékkészlet nem sűrű, vagyis van egy $B(c, r)$ kör, amelyben a függvény nem vesz fel értéket: $|f(z) - c| \geqslant r$ minden z-re.

Legyen $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c}$; ez egy egészfüggvény és

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - c|} \leqslant \frac{1}{r}.$$



A Liouville-tétel miatt $g(z)$ konstans, de akkor $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + c$ is konstans.

Tétel (kis Picard-tétel)

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor legfeljebb egy kivétellel minden komplex értéket felvesz.

Pl. az e^z értékkészlete $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Kevesebb is elég:

Tétel

Ha $f(z)$ egészfüggvény és $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z}=0$, akkor $f(z)$ konstans.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$. $n\geqslant 1$ és $r>1$ esetén

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}\leqslant\frac{M(r)}{r};\to 0\quad\text{ha } r\to\infty.$$

Tétel (a polinomok jellemzése)

Ha $f(z)$ egészfüggvény, és $\lim_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}=0$, akkor $f(z)$ legfeljebb n-edfokú polinom.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$. Az együtthatóbecslés szerint $r>1$-ra és $k\geqslant n+1$-re

$$|a_k|\leqslant\frac{M(r)}{r^k}\leqslant\frac{M(r)}{r^{n+1}}\to 0\quad\text{ha } r\to\infty.$$

Tehát, $|a_k|=0$ minden $k=n+1,n+2,\ldots$-re, vagyis $f(z)$ legfeljebb n-edfokú polinom.

Tétel (az algebra alaptétele)

Minden nem konstans komplex polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás. Átfogalmazva: Ha egy polinomnak nincs gyöke, akkor konstans.

Tegyük fel, hogy $p(z)=a_nz^n+\ldots+a_0$ polinom, $a_n\neq 0$ és nincs gyöke.

Vizsgáljuk az $f(z)=\dfrac{1}{p(z)}$ egészfüggvényt.

Az f folytonos, és véges határértéke van ∞-ben:

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^n\cdot\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right)}=\begin{cases}\frac{1}{a_n} & \text{ha } n=0\\ 0 & \text{ha } n>0.\end{cases}$$

ezért f korlátos. A Liouville-tétel miatt f konstans, tehát p is konstans, kész.

Ugyanez, Liouville-tétel helyett maximum-elvvel:

Ha $p(z)$ nem konstans, vagyis $n>0$, akkor $\lim\limits_{z\to\infty}p(z)=\infty$. A $|p(z)|$-nek van abszolút minimuma. Ez egyben lokális minimum is, vagyis ott a függvényérték 0.

350 Av. Pasteur
Rio de Janeiro
Google
Utcakép
INSTITUTO BENJAMIN CONSTANT
Rio de Janeiro
Av. Pasteur
Av. Portugal
Google
Kép készítésének ideje: júl. 2019
© 2020 Google
Magyarország
Általános Szerződési Feltételek
Hiba bejelentése

11. Laurent-sorok

Laurent-sorok konvergenciája. Kapcsolat a Fourier-sorokkal. Együtthatóformula. Egyértelműség. Laurent-sorba fejtés. Rac.tört függvények Laurent-sorba fejtése. A ctg z függvény 0 körüli Laurent-sorának első három tagja. Parseval-formula.

Definíció

- **c körüli Laurent-polinom:**

$$\sum_{n=-M}^{N} a_n(z-c)^n = a_{-M}(z-c)^{-M} + a_{-M+1}(z-c)^{-M+1} + \ldots + a_N(z-c)^N$$

- **c körüli Laurent-sor:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

  - A Laurent-sor konvergens, ha mindkét irányban konvergens: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\left(\frac{1}{z-c}\right)^n$ is konvergens (hasonlóan az $\int_{-\infty}^{\infty}$ alakú improprius integrálokhoz).
  - Ha $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$, akkor a sort hatványsornak tekintjük; a c-beli érték az a_0.

Fourier-sor

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{n\cdot it} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{-n}}{2}\cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{-n}}{2i}\sin(nt)$$

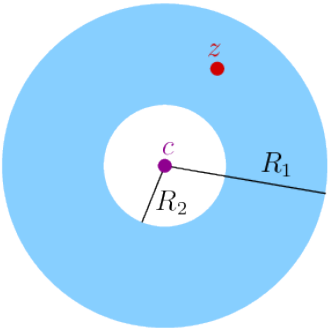
Olyan Laurent-sor, amit csak az egységkörvonalon vizsgálunk.

A Laurent-sor konvergenciatartománya

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$$

- A sor "pozitív" fele, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ egy hatványsor, ez valamilyen, c középpontú, $0 \leqslant R_1 \leqslant \infty$ sugarú **kör belsejében** lokálisan egyenletesen abszolút konvergens, a kör külsejében divergens. (A határral most sem foglalkozunk.)

- A sor "negatív" fele, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ egy hatványsor, amelybe $\frac{1}{z-c}$-t helyettesítettünk; ez meg valamilyen, c középpontú, $0 \leqslant R_2 \leqslant \infty$ sugarú **kör külsejében** lokálisan egyenletesen abszolút konvergens, belül divergens.



- Lehetséges $R_2 > R_1$ is; a számunkra érdekes eset, ha $R_2 < R_1$; ilyenkor a konvergenciahalmaz egy "körgyűrű".
  Ha a belső sugár 0, akkor csak a c pont hiányzik.
  Ha a külső sugár ∞, akkor nincs is külső kör.

- Az egyenletes konvergencia miatt a sor mindkét fele egy-egy holomorf függvényhez konvergál, avagy, az első fele egy hatványsor, a másik fele pedig egy hatványsor és az $\frac{1}{z-c}$ függvény kompozíciója, tehát a második fele is holomorf. Tehát, a Laurent-sor összege holomorf.

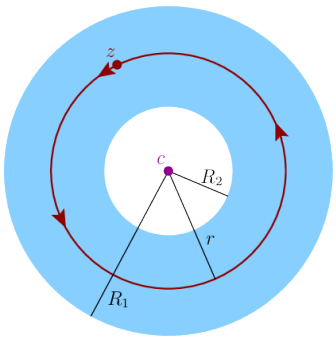
Példák

Laurent-sor	konvergenciatartomány
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$	$0 < \lvert z\rvert < \infty$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z-1)^n}$	$\frac{1}{2} < \lvert z-1\rvert < 3$
$\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^n}$	$\varnothing \quad (2 < \lvert z-1\rvert < 1)$

Tétel (együtthatóformula)

Tegyük fel, hogy az $R_2 < |z-c| < R_1$ körgyűrűn

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$



Ekkor bármely $R_2 < r < R_1$ és $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}\, \mathrm{d}z.$$

Következmény

A Laurent-sor egyértelmű.

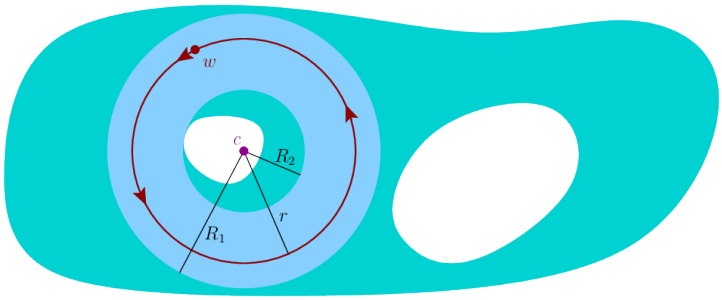
Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(w-c)^n}{(w-c)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(w-c)^{n-k-1}\right)\mathrm{d}w=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}(w-c)^{n-k-1}\,\mathrm{d}w\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot\left\{\begin{matrix}1 & \text{ha } n-k-1=-1\\ 0 & \text{ha } n-k-1\neq -1\end{matrix}\right\}=a_k.$$

Tétel (Laurent-sorba fejtés)



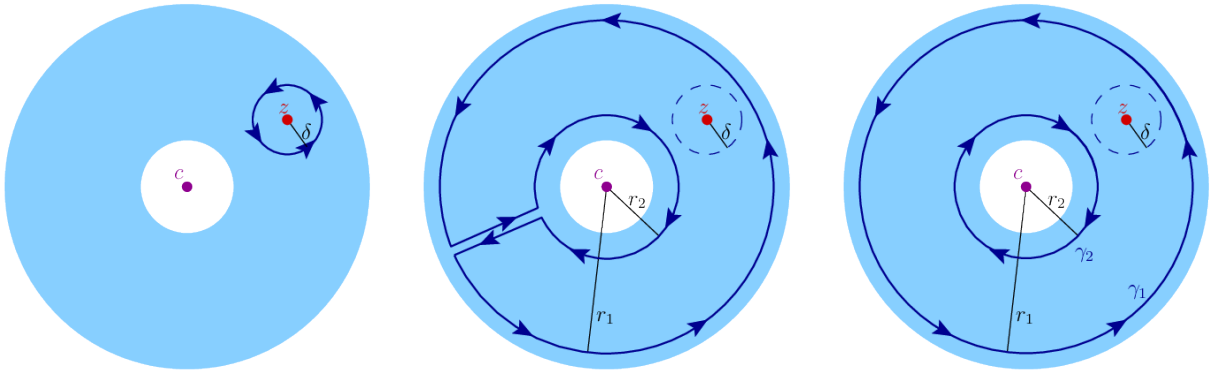
Ha f holomorf a $R_2<|z-c|<R_1$ körgyűrűn, akkor a c körül a függvény Laurent-sorba fejthető ezen a halmazon:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n,\qquad \text{ha } R_2<|z-c|<R_1,$$

és az együtthatók:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\qquad \text{bármely } R_2<r<R_1\text{-re.}$$

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges z pontot a gyűrűből. A z körül egy kicsi $\delta>0$ sugarú körön írjuk fel a Cauchy-formulát. Legyen r_1 és r_2 két sugár, $R_2<r_2<|z-c|-\delta$ és $|z-c|+\delta<r_1<R_1$. A kis kört átnyomorgatjuk az r_1 sugarú, pozitív irányítású γ_1 kör és az r_2 sugarú, negatív irányítású γ_2 kör uniójává.



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=\delta}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Másképpen: Felírjuk az általános Cauchy-formulát a két új körből álló rendszerre: Bármilyen, a körgyűrű külsejében felvő pontra, a két kör indexének összege 0, tehát

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\big(n(z,\gamma_1)+n(z,\gamma_2)\big)\cdot f(z)=1\cdot f(z).$$

A nagyobbik körön $\left|\frac{z-c}{w-c}\right|=\frac{|z-c|}{r_1}<1$. Az első vonalintegrál:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(w-c)-(z-c)}\,\mathrm{d}w=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(w-c)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-c}{w-c}}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(w-c)}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n\right)\mathrm{d}w=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(z-c)^n.$$

Ez lesz a Laurent-sor "pozitív" fele.

A kisebbik körön $\left|\frac{w-c}{z-c}\right|=\frac{r_2}{|z-c|}<1$. A második vonalintegrál:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(z-c)-(w-c)}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(z-c)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w-c}{z-c}}\,\mathrm{d}w$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(z-c)}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-c}{z-c}\right)^k\right)\mathrm{d}w=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}f(w)(w-c)^k\,\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^{-k-1}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n\cdot(z-c)^n.$$

Ez pedig a Laurent-sor "negatív" fele, kész.

Példák

Azonos középpontú, de különböző körgyűrűkön lehet különböző a Laurent-sor.

Ha $|z|<1$, akkor

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots;$$

Ha viszont $|z|>1$, akkor

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\ldots.$$

Az $f(z)=\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{2-z}$ függvény Laurent-sorai

$\lvert z\rvert<1$	$1<\lvert z\rvert<2$	$2<\lvert z\rvert$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-1}{z^m}$	$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-1-2^{m-1}}{z^m}$

Program: racionális törtek Laurent-sorba fejtése

Pl. $f(z)=\dfrac{z^4+z+1}{z^3+z^2}$ az 1 körül, az $1<|z-1|<2$ gyűrűn

1. maradékosan osztunk, parciális törtekre bontjuk: $f(z)=z-1+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z+1}$.
2. a magasabb fokú törtek deriváltak, pl. $\dfrac{1}{z^2}=\left(\dfrac{-1}{z}\right)'$
3. átírjuk $(z-1)$-gyel: $f(z)=(z-1)-\left(\dfrac{1}{1+(z-1)}\right)'+\dfrac{1}{(z-1)+2}$
4. minden nevezőből kiemeljük a nagyobb tagot: $f(z)=(z-1)-\left(\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{z-1}}\right)'+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$
5. átírjuk mértani sor összegévé: $f(z)=(z-1)-\left(\frac{1}{z-1}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z-1}\right)^k\right)'+\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^k$
6. rendezzük, csoportosítjuk.

Példa

A 0 körül, a $0<|z|<\pi$ körben, írjuk fel $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sorának első néhány tagját.

Ha $|z|$ kicsi, akkor

$$\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+O(|z|^6)}{z\left(1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}+O(|z|^6)\right)}=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+O(|z|^6)\right)\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{6}-\frac{z^4}{120}+O(|z|^6)\right)}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+O(|z|^6)\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{6}-\frac{z^4}{120}+O(|z|^6)\right)^k$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+O(|z|^6)\right)\cdot\left(1+\left(\frac{z^2}{6}-\frac{z^4}{120}\right)+\left(\frac{z^2}{6}\right)^2+O(|z|^6)\right)$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+O(|z|^6)\right)\cdot\left(1+\frac{z^2}{6}+\frac{7z^4}{360}+O(|z|^6)\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}+O(|z|^5).$$

Tétel (Parseval-formula Laurent-sorokra)

Ha $f(z)$ holomorf a $|z|=r$ körvonalon (tehát holomorf egy kicsivel nagyobb körgyűrűn), és itt a 0 körüli Laurent-sora $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$, akkor

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

Az $r=1$ esetben

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(e^{it})\right|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2.$$

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{it})\cdot\overline{f(re^{it})}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(re^{it})^n\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{a_m}(re^{-it})^m\right)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(a_n\overline{a_m}r^{n+m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{(n-m)it}\,\mathrm{d}t\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_n\overline{a_m}r^{n+m}\begin{Bmatrix}1 & \text{ha } n=m\\ 0 & \text{ha } n\neq m\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

12. Izolált szingularitások

Izolált szingularitások osztályozása. A megszüntethető szinularitások, pólusok és lényeges szingularitások jellemzése. Az $e^{1/z}$ viselkedése a 0 közelében. Casorati-Weierstrass tétel. Nagy Picard tétel (csak kimondani). Viselkedés a ∞-ben.

Definíció

- Az $f(z)$-nek a c pontban "izolált szingularitása" van, ha f holomorf a c egy $\dot{B}(c,r)$ pontozott környezetében, de nem értelmes c-ben. Ezen belül:
  - Az $f(z)$-nek a c pontban "megszüntethető szingularitása" van, ha van olyan, c-ben holomorf $g(z)$ függvény, amelyre (c kivételével) $f(z) = g(z)$.
    Ha $f(z)$-nek megszüntethető szingularitása van, akkor azt is szokás mondani, hogy $f(z)$ "holomorf" c-ben.
  - Az $f(z)$-nek a c pontban "m-edrendű pólusa" van, ha $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$, ahol m pozitív egész, $g(z)$ holomorf c-ben és $g(c) \neq 0$.
  - Az $f(z)$-nek a c pontban "lényeges szingularitása" van, ha c nem megszüntethető szingularitás, és nem is pólus.

Példák

- A $\dfrac{\sin z}{z}$ függvénynek megszüntethető szingularitása van a 0-ban.
- A $\operatorname{ctg} z$ függvénynek elsőrendű pólusa van a π többszöröseiben.
- Az e^{1/z^4} függvénynek lényeges szingularitása van a 0-ban.

Megszüntethető szingularitások

Tétel (megszüntethető szingularitások jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban. és a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Ezek ekvivalensek:

(a) Az $f(z)$-nek a c pontban megszüntethető szingularitása van.

(b) $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$.

(c) $\lim_{z \to c} f(z)$ létezik és véges.

(d) A c egy pontozott környezetében $f(z)$ korlátos.

(e) $\lim\limits_{z \to c} \big((z-c) \cdot f(z)\big) = 0$.

Bizonyítás. (a)$\Leftrightarrow$(b), mert a hatványsor lesz a Laurent-sor és fordítva.

(a)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(e) triviális.

(e)$\Rightarrow$(b): Legyen k tetszőleges pozitív egész; megmutatjuk, hogy $a_{-k} = 0$.

Veszünk egy elég kicsi r sugarat, felírjuk az együthatóformulát, majd triviális becslés:

$$|a_{-k}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z) \cdot (z-c)^{k-1} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \left(\tfrac{1}{2\pi} \max_{|z-c|=r} |f(z)| \cdot r^{k-1} \right) \cdot 2\pi r =$$

$$= \left(\max_{|z-c|=r} |(z-c) \cdot f(z)| \right) \cdot r^{k-1}.$$

Most $r \to 0$. A feltétel szerint $\lim_{r\to 0+} \max_{|z-c|=r} |(z-c) \cdot f(z)| = 0$. A második tényező, r^{k-1} konstans, ha $k = 1$, és 0-hoz tart, ha $k \geqslant 2$.

A határérték mindenképpen 0, tehát $a_{-k} = 0$.

Pólusok

Tétel (pólusok jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban, a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$, és m pozitív egész.

Ezek ekvivalensek:

(a) Az $f(z)$-nek a c pontban m-edrendű pólusa van.

(b) $a_{-m} \neq 0$, és $a_{-m-1} = a_{-m-2} = a_{-m-3} = \ldots = 0$.

(c) Az $1/f(z)$ függvénynek a c pontban m-szeres gyöke van.

(d) $\lim_{z\to c} \big((z-c)^m f(z)\big)$ létezik, véges és nem 0.

Következmény

$f(z)$-nek akkor és csak akkor van pólusa c-ben, ha $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$.

Bizonyítás. (a)⇒(b): Egy c-ben holomorf, nemnulla $g(z)$ függvénnyel $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$. Vegyük $g(z)$ hatványsorát c körül, és osszuk el $(z-c)^m$-mel, megkapjuk $f(z)$ Laurent-sorát. Trivi, hogy $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \ldots = 0$ és $a_{-m} = g(c) \neq 0$.

(b)⇒(a): legyen $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-c)^n$, akkor $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c) = a_{-m} \neq 0$.

(a)⇔(c): Ha $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c) \neq 0$, akkor $\dfrac{1}{f(z)} = (z-c)^m \cdot \dfrac{1}{g(z)}$ és fordítva.

(a)⇒(d): $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c) \neq 0$, tehát $\lim_{z\to c} \big((z-c)^m f(z)\big) = \lim_{z\to c} g(z) = g(c) \neq 0$.

(d)⇒(a): A $g(z) = (z-c)^m f(z)$ függvénynek véges, nemnulla határértéke van, tehát $g(z)$-nek megszüntethető szingularitása van c-ben, $g(c)$ értéke nem 0.

Lényeges szingularitások

Következmény (lényeges szingularitások jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban, a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$.

Ezek ekvivalensek:

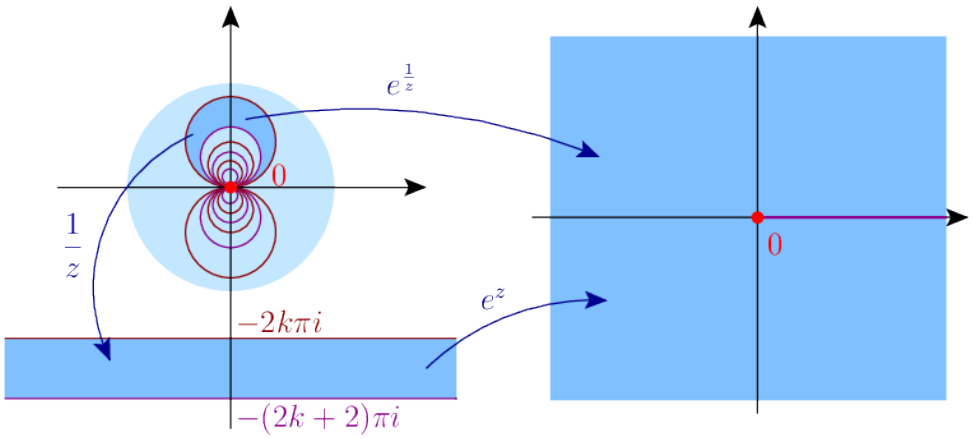
(a) Az $f(z)$-nek a c pontban lényeges szingularitása van.

(b) Az $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ együtthatók között végtelen sok nemnulla van.

(c) A $\lim_{z \to c} f(z)$ határérték nem létezik (véges és végtelen sem).

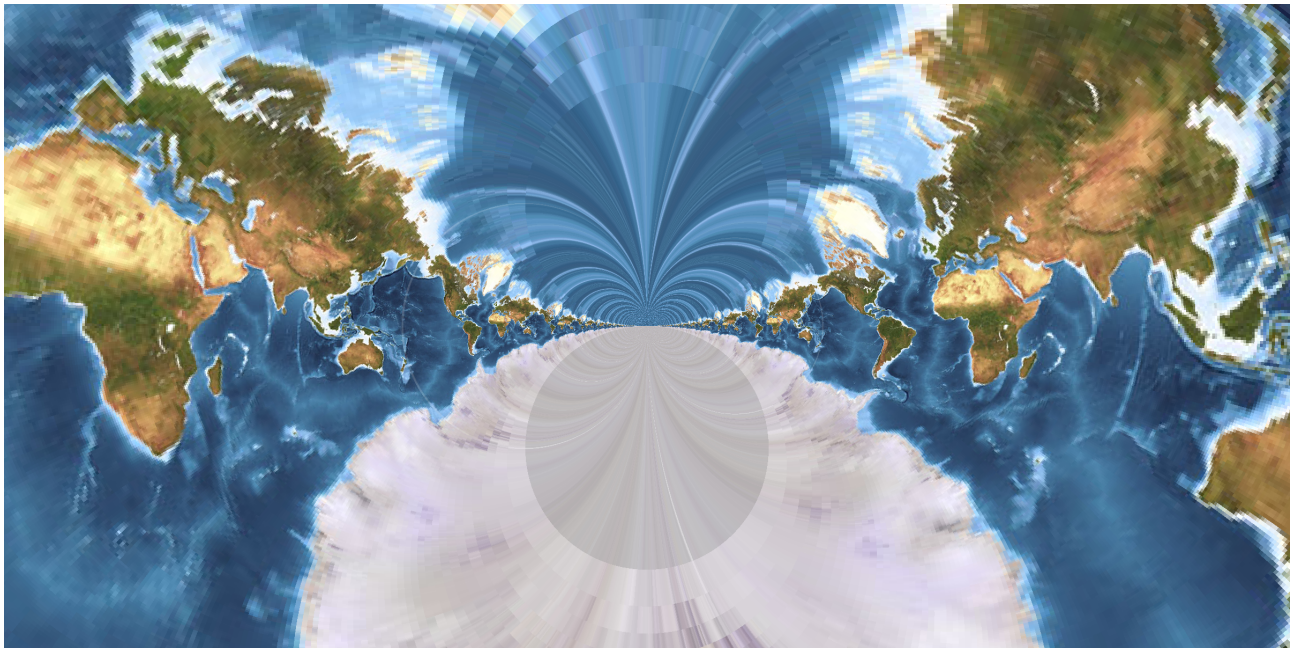
Példa: Az $e^{1/z}$ szingularitása a 0-ban

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/n!}{z^n}$$



Mindegyik holdacska képe a teljes komplex sík, kivéve a 0 pontot.

Példa: Az $\exp(1/iz + \pi i/3)$ hatása a 0 közelében

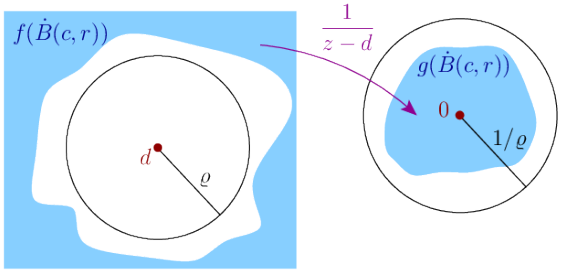


Casorati–Weierstrass tétel

Ha $f(z)$-nek lényeges szingularitása van a c pontban, akkor

- bármely $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$-hez van olyan $(z_1, z_2, \ldots)$ sorozat, amelyre $z_n \neq c$, $z_n \to c$ és $f(z_n) \to \alpha$.
- Bármely $r > 0$-ra, a $\dot{B}(c, r)$ pontozott környezett f szerinti képe, $f\big(\dot{B}(c, r)\big)$ sűrű $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás. A két állítás ekvivalens; a másodikat bizonyítjuk.



Indirekt. Tegyük fel, hogy $f\big((\dot{B}(c,r)\big)$ nem sűrű: valamilyen $B(d,\varrho)$ körben nincs pontja.

Legyen $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-d}$; ezzel $g\big((\dot{B}(c,r)\big)\subset \overline{B}(0,\frac{1}{\varrho})$.

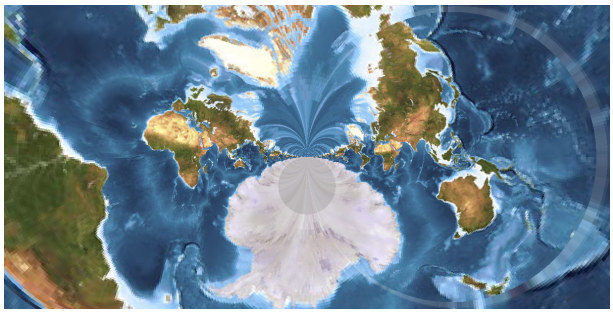
A $\dot{B}(c,r)$ pontozott környezetben $g(z)$ korlátos, tehát c-ben megszüntethető szingularitása van.

Ha $g(c)\neq 0$, akkor $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}+d$ holomorf c-ben, de ez ellemtmodás, mert feltettük, hogy lényeges szingularitása van.

Ha $g(c)=0$, akkor $\lim\limits_{z\to c} f(c)=\lim\limits_{z\to c}\left(\dfrac{1}{g(z)}+d\right)=\infty$, tehát f-nek pólusa van c-ben; ez is ellentmondás.

nagy Picard-tétel

Ha $f(z)$-nek lényeges szingularitása van a c pontban, akkor a c bármely pontozott környezetében, legfeljebb 1 kivétellel, minden komplex értéket végtelen sokszor felvesz.



Defínició (viselkedés ∞-ben)

Az $f(z)$ ∞-beli viselkedésén az $f(1/z)$ 0-beli viselkedését értjük:

- $f(z)$ a ∞-ben holomorf, ha $f(1/z)$ a 0-ban holomorf.
- $f(z)$-nek a ∞-ben m-szeres gyöke van, ha $f(1/z)$-nek a 0-ban m-szeres gyöke van.
- $f(z)$-nek a ∞-ben m-edrendű pólusa van, ha $f(1/z)$-nek a 0-ban m-edrendű pólusa van.
- $f(z)$-nek a ∞-ben lényeges szingularitása van, ha $f(1/z)$-nek a 0 lényeges szingularitása.

Példák

Az m-edfokú polinomoknak a ∞-ben m-edrendű pólusuk van.

Az e^z függvénynek a ∞-ben lényeges szingularitása van.

13. A reziduumtétel

Reziduum véges szingularitás körül. Reziduumtétel. Módszerek a reziduum kiszámítására. Reziduum ∞-ben.

Definíció (függvény reziduuma véges pontban)

Legyen $f(z)$ holomorf a c komplex szám egy pontozott környezetében, és itt a Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Az a_{-1} együtthatót az $f(z)$ függvény c pontbeli *reziduumának* nevezzük; jele

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) \quad \text{vagy} \quad \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Ekvivalens definíció

Ha $f(z)$ holomorf a $0 < |z-c| < r_0$ körben, akkor bármely $0 < r < r_o$ esetén

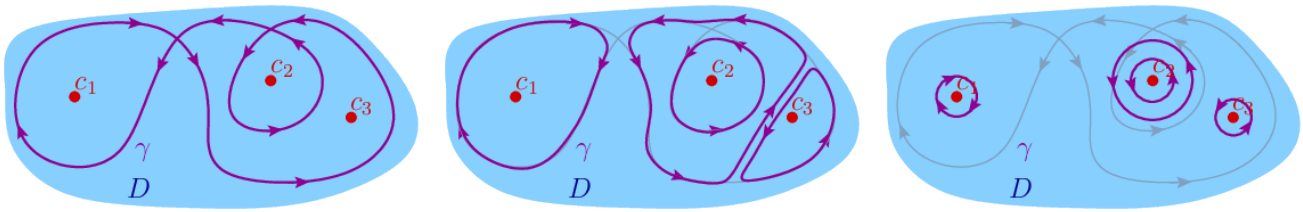
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Bizonyítás. Ez éppen az együttható-formula az a_{-1}-re.

Rezidumtétel (nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} n(\gamma, c) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f.$$



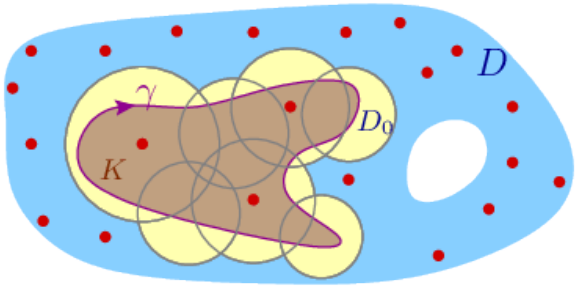
Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban, majd ezeket a darabokat egy-egy kis körre mozgatjuk, végül megszámoljuk a köröket a szingularitások körül.

Persze a dolgok nem mindig olyan egyszerűek, ahogy elképzeljük...

A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.

A D-t egy szűkebb D_0 tartományra cseréljük, amelyben már csak véges sok szingularitás van.

A γ nullhomotóp, tehát van egy folytonos $\Gamma(t,u) : [0,1]^2 \to D$ leképezés úgy, hogy minden $u \in [0,1]$ paraméter értékre $t \mapsto \Gamma(t,u)$ egy zárt görbe, $\gamma(t) = \Gamma(t,0)$ és $t \to \Gamma(t,1)$ konstans. Legyen K a Γ képe, ami összefüggő és kompakt.



A K minden c pontja körül vegyünk egy $B(c,r_c)$ nyílt körlemezt úgy, hogy a $\dot{B}(c,r_c)$ pontozott környezeten az $f(z)$ holomorf legyen. Ezek a nyílt körök lefedik K-t, tehát közülük véges sok, $B_1, B_2, \ldots, B_N$ is lefedi.

Legyen $D_0 = B_1 \cup \cdots \cup B_N$; ez egy összefüggő, nyílt halmaz, amely tartalmazza K-t; tehát a γ görbe D_0-ben is nullhomotóp.

Mivel mindegyik B_j-ben legfeljebb egy szingularitása lehet $f(z)$-nek, a D_0 tartományban már csak véges sok szingularitás van.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z-c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C}\backslash\{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.

Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok negatív kitevős részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z-c_1)^n}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z-c_2)^n}\right) - \ldots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z-c_m)^n}\right).$$

A szingularitásokon kívül ez mind holomorf.

Bármely $1 \leqslant j \leqslant m$-re a c_j pontban az $f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}$ függvénynek megszüntethető szingularitása van, a többi kivont sor pedig holomorf c_j-ben. Tehát, $g(z)$-nek mindegyik c_j-ben megszüntethető szingularitása van; $g(z)$ az egész D_0 tartományon holomorf.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n};$$

a $D_0\backslash\{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{j,-n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-c_j)^n}\right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

$n \geqslant 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0. Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^m \left(a_{j,-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c_j}\right) = \sum_{j=1}^m \Big(\operatorname*{Res}_{c_j} f\cdot n(\gamma,c_j)\Big).$$

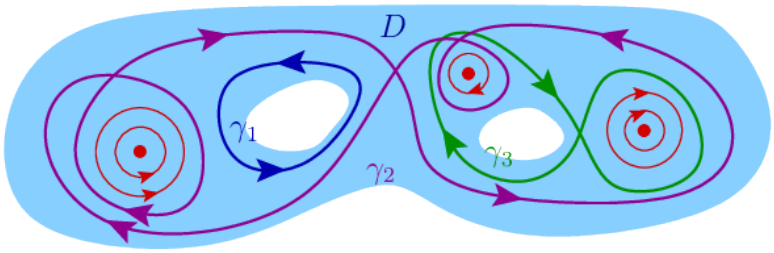
Ha $c\in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.
Ha $c\notin D_0$, akkor $\frac{1}{z-c}$ holomorf D_0-on és γ nullhomotóp, ezért $n(\gamma,c) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-c} = 0$.

Ezek után

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^m n(\gamma,c_j)\cdot\operatorname*{Res}_{c_j} f = \sum_{c\in D} n(\gamma,c)\cdot\operatorname*{Res}_c f.$$

Rezidumtétel (nullhomológ változat)

Legyen $D\subset\mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c\notin D$ pontra $\sum_{j=1}^k n(\gamma_j,c)=0$. Ekkor $\sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c\in D}\left(\sum_{j=1}^k n(\gamma_j,c)\right)\cdot\operatorname*{Res}_c f$.



Bizonyítás. (vázlat) Legyen $D_1\subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf. Az eddigi görbékhez továbbiakat veszünk hozzá: mindegyik c szingularitás körül rajzolunk $-\sum_{j=1}^k n(\gamma_j,c)$ darab kis kört. Az így kapott görbe lánc indexe minden D_1-en kívüli pontra nézve 0, tehát az általános Cauchy-tétel szerint ezeken a görbéken a vonalintegrálok összege 0. Ezért,

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{c\in D}\left(\sum_{j=1}^k n(\gamma_j,c)\right)\cdot\operatorname*{Res}_c f = 0.$$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c}\frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c}\frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2\cdot e^{1/z} = z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}z^{-1}+\frac{1}{24}z^{-2}+\dots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^2\cdot e^{1/z}\right)=\frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2\sin z} = \frac{1}{z^3(1-\frac{z^2}{6}+\dots)} = \frac{1}{z^3}\left(1+\frac{z^2}{6}+\dots\right) = \frac{1}{z^3}+\frac{1/6}{z}+\dots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z^2\sin z}=\frac{1}{6}$.

- $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{\cos z}{z} = \cos 0.$
- $\operatorname{Res}_{z=0} \dfrac{\cos z}{z^3} = \dfrac{(\cos z)''\big|_{z=0}}{2!} = -\dfrac{1}{2}.$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z\to c} f(z)\cdot(z-c).$$

- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c}\big(f(z)\cdot g(z)\big) = \lim_{z\to c} f(z)\cdot g(z)\cdot(z-c) = f(c)\cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$

- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z\to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

- Ha a c pontban $f(z)$ és $g(z)$ holomorf, $g(c)\neq 0$, és $h(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{g(z)\cdot h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)}\cdot \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)}\cdot\frac{1}{h'(c)} = \frac{f(c)}{g(c)\cdot h'(c)}.$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\sin z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

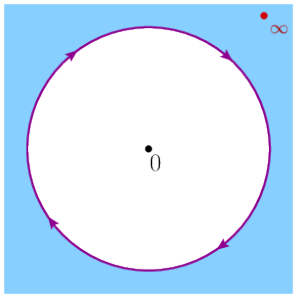
$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z^4-1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{-4i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{(z^3+2\sin z)\cdot\cos z} = \frac{e^{2z}}{(z^3+2\sin z)'\cdot\cos z}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{2}.$$

Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók



- Ha $f(z)$ holomorf az R sugarú körön és azon kívül, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z$.
- $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\dfrac{1}{w^2}\cdot f\left(\dfrac{1}{w}\right)\right)$.

Bizonyítás.. (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

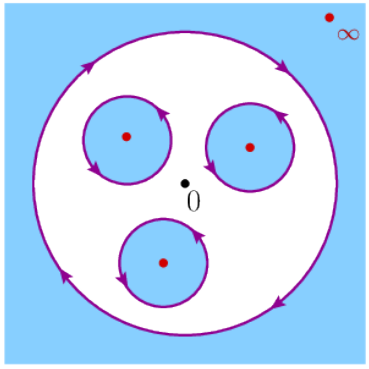
(b) Helyettesítéses integrálás: $z = \frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!), $\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{R}} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{-\,\mathrm{d}w}{w^2} = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$

A reziduumok összege

Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$



Bizonyítás. Ha a véges szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = \left(\sum_{|c|<R} \operatorname*{Res}_c f\right) + \operatorname*{Res}_\infty f$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

14. A reziduumtétel alkalmazásai

$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}$ és $\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}$ kiszámítása a reziduumtétel segítségével.
A $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény alapvető tulajdonságai. Végtelen sorok összegzése a $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$, a $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ és a $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ függvények reziduumaival. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ és $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+-\ldots$ kiszámítása.

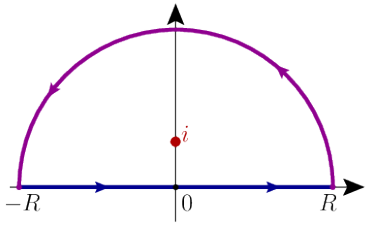
Improprius integrálok kiszámítása

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =? \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x =? \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}+1}\,\mathrm{d}x =? \qquad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x =?$$

Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{iz}}{z^2+1} + O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right) \\ &= 2\pi i\cdot \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= 2\pi i\cdot \frac{e^{-1}}{2i} + O\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\pi}{e} + O\left(\frac{1}{R}\right).\end{aligned}$$

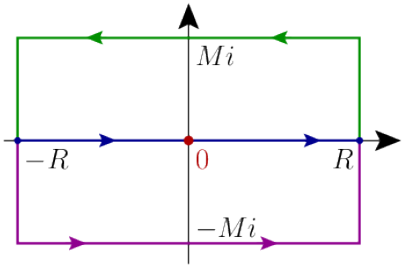


A $R\to\infty$ határátmenetből: $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{2e}$.

Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x =?$$

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\downarrow} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{\downarrow} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}\int_{\downarrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\downarrow} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$



A felső félsíkban e^{iz}, az alsó félsíkban e^{-iz} korlátos.

$$\begin{aligned}\ldots &= \frac{1}{4i}\int_{\square} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\uparrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\downarrow} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z} - \frac{1}{4i}\int_{\uparrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\downarrow} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\uparrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\downarrow} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}|\leqslant 1$ és $|z|\geqslant R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M$.

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \leqslant e^{-M}$ és $|z| \geqslant M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R$.

Például az $M=\sqrt{R}$ választással

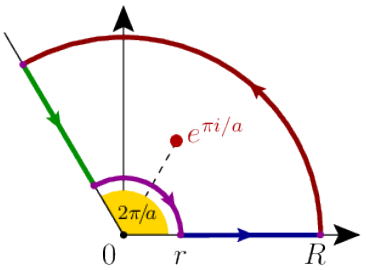
$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad = \frac{\pi}{2} \quad + O\Big(\frac{1}{\sqrt{R}}\Big) \quad + O\Big(e^{-\sqrt{R}}\sqrt{R}\Big).$$

Mindkét hibatag 0-hoz tart, tehát

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i\cdot\frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a})\int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = \lim_{r\to 0,R\to\infty}\int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = 2\pi i\cdot\frac{-e^{\pi i/a}}{a\cdot(1-e^{2\pi i/a})} = \frac{\pi}{a}\cdot\frac{2i}{e^{\pi i/a}-e^{-\pi i/a}} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}.$$

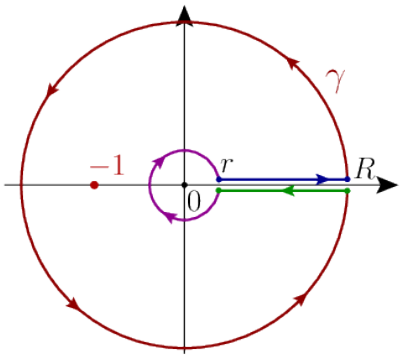
$a\to 1$-re, $a=2$-re és $a\to\infty$-re könnyen ellenőrizhetjük.

Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \leqslant -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z)\cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0\leqslant \arg z \leqslant 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n\cdot R\Big), \qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log\frac{1}{r})^n\cdot r\Big).$$



Reziduumtétel:

$$\sum_{r<|c|<R} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\cdot p(\log z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_r^R f(x)\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x + O\Big(R^{d+1}(\log R)^n\Big) + O\Big((\log\frac{1}{r})^n\cdot r\Big).$$

$r\to 0$, $R\to\infty$ határátmenet: $\displaystyle\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log x)\Big)$.

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

$$\frac{p(X)-p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{p(\log z)}{(z+1)^2}$$
$$= \operatorname*{Res}_{z=-1} \Big(p(\log z)\Big)'\Big|_{z=-1} = p'(\log(-1))\cdot\frac{1}{-1} = -p'(\pi i) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Végtelen sorok összegének kiszámítása

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

$$\frac{1}{1^4+1} + \frac{1}{2^4+1} + \frac{1}{3^4+1} + \frac{1}{4^4+1} + \ldots = ?$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = ?$$

Lemma

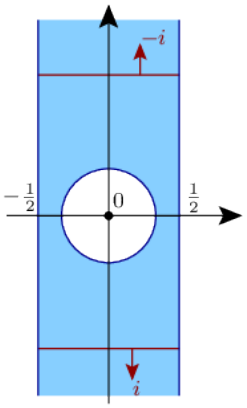
(a) A $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z=k$ pontban, akkor $\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.

Bizonyítás. (a) $\pi\operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ pólusai ott vannak, ahol $\sin(\pi z) = 0$, vagyis az egész helyeken.
(b) $\operatorname*{Res}_{z=k} \dfrac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \dfrac{\pi\cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=k} = 1.$
(c) Az $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$-nek a k helyen elsőrendű pólusa van, tehát
$\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)\cdot\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k).$
(d) $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$ esetén $\pi\operatorname{ctg}(\pi z) \to \mp i$, ezért pl. a $|\operatorname{Re} z| \leqslant \frac{1}{2}$, $|z| > 1/3$ perióduson a függvény korlátos.

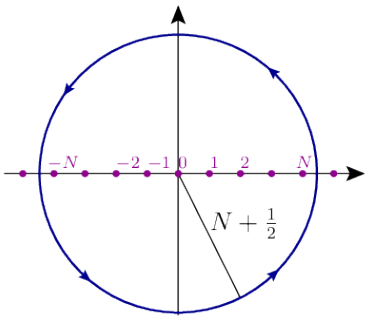


Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leqslant -2$, akkor $\sum\limits_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}\limits_{z=c}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big)=0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum\limits_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Bizonyítás. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}\limits_{z=k}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big)=f(k)$.



(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z|=N+\frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.

A körvonalon $|f(z)|=O(N^{\deg f})\leqslant O(N^{-2})$, $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

$$\sum_{|c|\leqslant N}\operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac12} f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\,\mathrm{d}z=O\Big(\frac{1}{N^2}\cdot N\Big)=O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Az $N\to\infty$ határátmenetből $\sum\limits_{c\in\mathbb{C}}\operatorname{Res}\limits_{z=c}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big)=0$.

Példa:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{Res}\limits_{z=k}\dfrac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}=0$.

Ha $k\neq 0$, akkor $\operatorname{Res}\limits_{z=k}\Big(\dfrac{1}{z^2}\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big)=\dfrac{1}{k^2}$.

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z=z^{-1}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-\ldots$

Átírva πz-vel: $\dfrac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}=z^{-3}-\dfrac{\pi^2}{3}z^{-1}-\dfrac{\pi^4}{45}z-\ldots$, tehát $\operatorname{Res}\limits_{z=0}\dfrac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}=-\dfrac{\pi^2}{3}$.

$$0=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{Res}_{z=k}\frac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok 1/3 sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.

  $\operatorname{Res}\limits_{z=k}\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}=(-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.

- $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}\limits_{z=k+\frac12}\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}=(-1)^{k+1}$.

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) ??? (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s\cdot\Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra). A függvénynek elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken. Gond, hogy a függvény gyorsan nő, és nem könnyű kiszámolni sem...

  Érdekesség: $\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$

- $\psi(s) = \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = (\log\Gamma(s))'$ (digamma függvény) ??? Ennek is elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken, 1 reziduummal, és nem is nő nagyon gyorsan; a logaritmus megszelídíti...

  $\psi(1-s) - \psi(s) = \pi\operatorname{ctg}(\pi s)$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\cdot(-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}\cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2}{2}z^2 + O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1 - \frac{\pi^2}{2}z^2 + O\big(|z|^4\big)\right)^{-1} = \frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1 + \frac{\pi^2}{2}z^2 + O\big(|z|^4\big)\right) = \pi z^{-3} + \frac{\pi^3}{2}z^{-1} + O\big(|z|\big)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{\pi^3}{2}.$$

$$0 = \sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{\pi^3}{2} - 8\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \qquad \text{tehát:} \quad \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

15. Az argumentumelv

Meromorf függvények. Logaritmikus derivált. Argumentumelv rektifikálható görbékkel határolt tartományra. Az argumentumelv kiterjesztései

Definíció (meromorf függvény)

Az $f(z)$ függvény *meromorf* a D tartományon, ha izolált szingularitások kivételével holomorf, és mindegyik szingularitás pólus.

Ebben a részben meromorf függvények gyökeit és pólusait fogjuk számolni mindenféle görbék belsejében.

A fő eszközünk a gyökök számolásához:

Definíció (logaritmikus derivált)

Legyen $f(z)$ meromorf egy D tartományon. Az $f(z)$ *logaritmikus deriváltja* az $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ függvény.

A logaritmikus derivált ott értelmes (és persze holomorf), ahol az $f(z)$ holomorf és nem nulla.

A lokálisan létező $\log f(z)$ függvénnyel $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \big(\log f(z)\big)'$; innen jön a név.

Az $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ helyett szokás így is írni: $\dfrac{f'}{f}(z)$, kihangsúlyozva, hogy a logaritmikus derivált egy operátor.

A logaritmikus derivált tulajdonságai

(a) $\dfrac{(f\cdot g)'}{f\cdot g} = \dfrac{f'}{f} + \dfrac{g'}{g}$;

(b) $\dfrac{(f/g)'}{f/g} = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g}$.

Bizonyítás. (a)

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g},$$

vagy, némi odafigyeléssel, lokálisan

$$\frac{(fg)'}{fg} = (\log fg)' = (\log f + \log g + C)' = (\log f)' + (\log g)' = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

(b)

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{(f'g - fg')/g^2}{f/g} = \frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g},$$

vagy:

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = (\log f/g)' = (\log f - \log g + C)' = (\log f)' - (\log g)' = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

A logaritmikus derivált reziduumai

Tegyük fel, hogy $f(z)$ meromorf a c pont egy környezetében.

(a) Ha f holomorf c-ben és $f(c) \neq 0$, akkor $\dfrac{f'}{f}$ holomorf c-ben, így $\operatorname{Res}_c \dfrac{f'}{f} = 0$.

(b) Ha f-nek m-szeres gyöke van c-ben, akkor $\dfrac{f'}{f}$-nek c-ben elsőrendű pólusa van, és $\operatorname{Res}_c \dfrac{f'}{f} = m$.

(c) Ha f-nek m-edrendű pólusa van c-ben, akkor $\dfrac{f'}{f}$-nek c-ben elsőrendű pólusa van, és $\operatorname{Res}_c \dfrac{f'}{f} = -m$.

Bizonyítás. (b) $f(z) = h(z) \cdot (z-c)^m$, a $h(z)$ függvény holomorf c-ben, és $h(c) \neq 0$.

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{h'}{h}(z) + \frac{\big((z-c)^m\big)'}{(z-c)^m} = \frac{h'}{h}(z) + \frac{m}{z-c}; \qquad \operatorname*{Res}_c \frac{f'}{f}(z) = \operatorname*{Res}_c \frac{h'}{h}(z) + \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{m}{z-c} = 0 + m.$$

(c) $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-c)^m}$, a $h(z)$ függvény holomorf c-ben, és $h(c) \neq 0$.

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{h'}{h}(z) - \frac{\big((z-c)^m\big)'}{(z-c)^m} = \frac{h'}{h}(z) - \frac{m}{z-c}; \qquad \operatorname*{Res}_c \frac{f'}{f}(z) = \operatorname*{Res}_c \frac{h'}{h}(z) - \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{m}{z-c} = 0 - m.$$

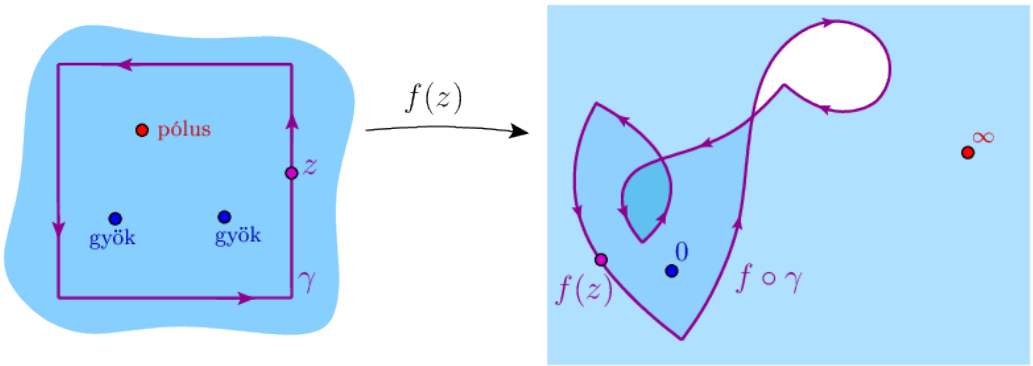
Tétel (argumentumelv)

Legyen $f(z)$ meromorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyzerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ gyökein és pólusain.

Jelöljük Z-vel és P-vel $f(z)$ gyökeinek és pólusainak számát γ belsejében multiplicitással, vagyis minden gyököt és pólust annyiszor számolunk, ahányszoros gyök, illetve ahányadrendű pólus. Ekkor

$$Z - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}(z)\, \mathrm{d}z = n(f \circ \gamma, 0)$$

avagy: A gyökök száma mínusz a pólusok száma a γ belsejében éppen annyi, mint ahányszor z-vel a görbe mentén körbesétálva, $f(z)$ értéke körbefordul.



Bizonyítás.

(a) Az $\dfrac{f'}{f}(z)$ logaritmikus derivált reziduuma az m-szeres gyököknél m, az m-edrendű pólusoknál $-m$, a többi pontban 0. A gyökök száma, Z a pozitív reziduumok összege, a pólusok száma, P pedig a negatív reziduumok összege (-1)-szer.

$$Z - P = \sum_{\gamma \text{ belsejében}} \operatorname{Res} \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}(z)\, \mathrm{d}z.$$

(b) A $w = f(z)$ helyettesítéssel integrálva $\mathrm{d}w = f'(z)\,\mathrm{d}z$ és

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z\in\gamma}\frac{f'}{f}(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{w\in(f\circ\gamma)}\frac{\mathrm{d}w}{w} = n(f\circ\gamma, 0).$$

Definíció

Legyen $f(z)$ holomorf az a pontban, és $f(a) = b$. Azt mondjuk, hogy az a pontban a b érték multiplicitása m, ha

- $f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ és $f^{(m)}(a) \neq 0$, vagyis
- az $f(z) - b$ függvénynek az a szám m-szeres gyöke.

Tétel

Legyen $f(z)$ meromorf a D tartományon, és a komplex szám. Legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ pólusain, és a γ pontjaiban $f \neq a$.

Jelöljük Z_a-val és P-vel, hogy $f(z)$ hányszor veszi fel az a értéket, illetve $f(z)$ pólusainak számát γ belsejében multiplicitással. Ekkor

$$Z_a - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,\mathrm{d}z = n(f\circ\gamma, a)$$

avagy: a függvény éppen annyiszor veszi fel az a értéket, mínusz a pólusok száma, mint ahányszor z-vel γ mentén körbesétálva, $f(z)$ értéke megkerüli az a-t.

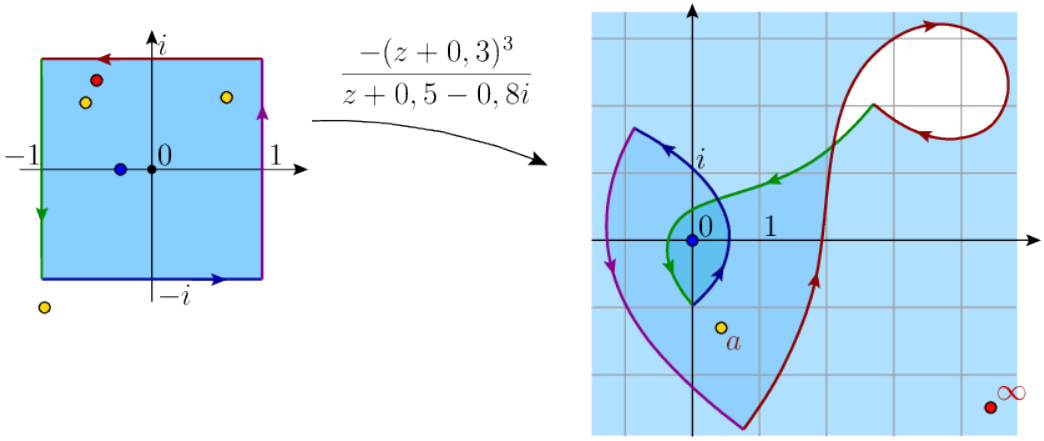
Bizonyítás. Argumentumelv a $g(z) = f(z) - a$ függvényre, majd $w = f(z)$ helyettesítés:

$$Z_a(f) - P(f) = Z(g) - P(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z\in\gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{z\in\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{w\in(f\circ\gamma)}\frac{\mathrm{d}w}{w-a} = n(f\circ\gamma, a).$$

Példa

A γ görbe a $\pm 1 \pm i$ csúcsú négyzet határa és $f(z) = \dfrac{-(z+0,3)^3}{z+0,5-0,8i}$.



A függvénynek háromszoros gyöke van a $(-0,3)$-ben, és elsőrendű pólusa a $(-0,5+0,8i)$-ben, tehát $Z - P = 3 - 1 = 2$. Az $f\circ\gamma$ görbe kétszer kerüli meg a 0-t.

A baloldalon a három sárga pont egyszeres képe az a pont, de csak kettő esik a γ belsejébe. Tehát $Z_a - P = 2 - 1 = 1$; az $f\circ\gamma$ görbe egyszer kerüli meg az a pontot.

Tétel (általános argumentumelv)

Legyen $f(z)$ meromorf, $g(z)$ holomorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ gyökein és pólusain.

Bármely c pontra legyen $m(c)$ a c multiplicitása, ha c gyöke f-nek; legyen $-m(c)$ a c rendje, ha c pólusa f-nek; egyébként legyen $m(c) = 0$. Ekkor

$$\sum_{c \text{ belső pont}} m(c) \cdot g(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'}{f}(z)\, \mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. Mivel $\dfrac{f'}{f}$-nek csak elsőrendű pólusai vannak,

$$\operatorname*{Res}_c \left(g \cdot \frac{f'}{f} \right) = g(c) \cdot \operatorname*{Res}_c \frac{f'}{f} = g(c) \cdot m(c);$$

$$\sum_{c \text{ belső pont}} m(c) \cdot g(c) = \sum_{c \text{ belső pont}} \operatorname*{Res}_c \left(g \cdot \frac{f'}{f} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'}{f}(z)\, \mathrm{d}z.$$

Példák

- $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)\, \mathrm{d}z$ az f gyökeinek száma (mínusz a pólusok száma) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma z \cdot \frac{f'}{f}(z)\, \mathrm{d}z$ az f gyökeinek összege (mínusz a pólusok összege) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, \mathrm{d}z$ az $f(z) = a$ egyenlet megoldásainak száma (mínusz a pólusok száma) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, \mathrm{d}z$ az $f(z) = a$ egyenlet megoldásainak összege (mínusz a pólusok összege) a görbe belsejében, multiplicitással.

  Ha $f(z)$ holomorf, és valahonnan tudjuk, hogy pontosan egy, egyszeres megoldás van, akkor ez az integrál megadja magát a megoldást.

16. A Rouché-tétel és alkalmazásai

Rouché-tétel. Az algebra alaptételének bizonyítása a Rouché-tételből. Lokális értékeloszlás. A nyílt leképezés tétele. Lokális inverz létezésének feltétele. Az inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága.

Mese

Szeretnénk bebizonyítani az algebra alaptételét az argumentumelvből.

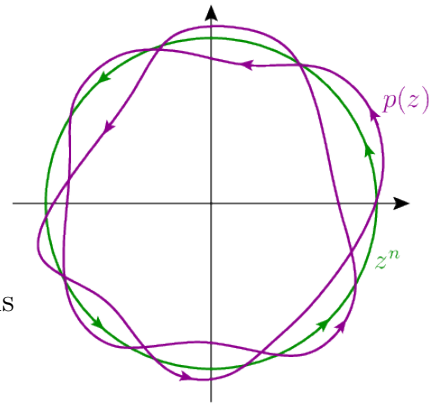
Legyen $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Ha $|z|$ nagy, akkor

$$p(z) = z^n + \text{"zaj"};$$

a "zaj" sokkal kisebb, mint a főtag, z^n.

Egy nagy körön a z^n n-szer fordul körbe. Szemléletesen, egy kis zaj ezt nem tudja elrontani... Vagy mégis?



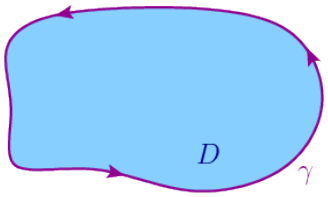
Rouché tétele

Legyen $f(z)$, $g(z)$ és $h(z) = f(z) + g(z)$ meromorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyzerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át f és g pólusain. Jelölje $Z_{\ldots}$ és $P_{\ldots}$ a megfelelő függvény gyökeinek, és pólusainak számát γ belsejében.

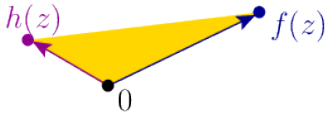
(1a) Ha a γ pontjaiban $|f| > |g|$, akkor $Z_{f+g} - P_{f+g} = Z_f - P_f$.

(1b) Ha a γ pontjaiban $|f| > |f - h|$, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

(2a) Ha a γ pontjaiban sem f, sem h nem nulla, és f/h nem lehet negatív valós sem, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.



(2b) Ha a γ pontjaiban $|f - h| < |f| + |h|$, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.



Bizonyítás. (1a) és (1b) ugyanaz.
(2a) és (2b) is azt fejezi ki, hogy az $f(z)$ és $h(z)$ pontokat összekötő zárt szakasz nem tartalmazza a 0-t.

(2b) $\Rightarrow$ (1b) triviális, mert ha $|f - h| < |f|$, akkor $|f - h| < |f| + |h|$.

Elég (2a)-t igazolni.

(2a) Állítás: ha a γ pontjaiban $f \neq 0$, $h \neq 0$, és f/h nem lehet negatív valós, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

Legyen D_1 az a halmaz, ahol sem f, sem h nem nulla, és f/h nem negatív valós. Ahol $f = 0$ vagy $h = 0$ vagy $f/h \in (-\infty, 0)$ az egy relatív zárt halmaz, tehát D_1 nyílt; az egyik komponensében fekszik γ.

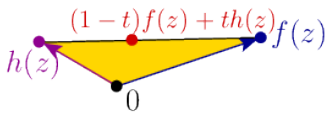
A D_1 halmazban $\dfrac{(h/f)'}{h/f}$-nek van primitív függvénye D_1-en: a $\log \dfrac{h}{f}$ főértéke. Ezért

$$(Z_h - P_h) - (Z_f - P_f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(h/f)'}{h/f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\log\frac{h}{f}\right)' = 0.$$

Tehát, $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

Alternatív bizonyítás: $0 \leqslant t \leqslant 1$ esetén legyen $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{\big((1-t)f+th\big)'}{(1-t)f+th}$. Ez minden $0 \leqslant t \leqslant 1$ esetén értelmes, mert γ pontjaiban $(1-t)f + th \neq 0$.



A $\varphi(t) = Z_{(1-t)f+th} - P_{(1-t)f+th}$ érték mindig egész szám; másrészt $\varphi(t)$, mint paraméteres integrál, folytonos. Tehát $\varphi(t)$ konstans, és $Z_f - P_f = \varphi(0) = \varphi(1) = Z_h - P_h$.

Egy újabb bizonyítás az algebra alaptételére

Legyen $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Legyen

$$R > 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|,$$

és írjuk fel a Rouché-tételt a $p(z)$ és az z^n függvényekre a $|z| \leqslant R$ körben.

A körvonalon

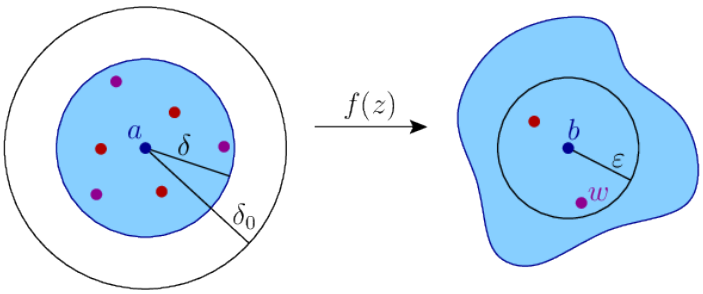
$$\big|p(z) - z^n\big| = \big|a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0\big| \leqslant$$
$$\leqslant |a_{n-1}|R^{n-1} + \ldots + |a_1|R + |a_0| \leqslant \big(|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|\big)R^{n-1} < R^n = |z^n|,$$

így a Rouché-tétel szerint a kör belsejében (multiplicitással számolva), a $p(z)$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint a z^n függvénynek, vagyis n darab.

Tétel (lokális értékeloszlás)

Legyen $f(z)$ holomorf az a pontban, és $f(a) = b$ k-szoros értéke (azaz $f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$). Ekkor $\exists \delta_0 > 0 \quad \forall 0 < \delta \leqslant \delta_0 \quad \exists \varepsilon > 0$, hogy

- Az $f(z) = b$ egyenletnek egyetlen megoldása az $B(a,\delta)$ halmazban a $z = a$ (és ez k-szoros érték), és
- Bármely $w \in \dot{B}(b,\varepsilon)$ számra az $f(z) = w$ egyenletnek pontosan k különböző megoldása van a $B(a,\delta)$ halmazban, és ezek mind egyszeres értékek.



Bizonyítás. Elég azt az esetet igazolni, ha $a = b = 0$.

Válasszuk δ_0-t olyan kicsinek, hogy a $0 < |z| \leqslant \delta_0$ körlapon $f \neq 0$ és $f' \neq 0$; ezt biztosan megtehetjük az unicitástétel miatt. Ezzel biztosítjuk, hogy $f(z) = 0$ egyetlen megoldása a $z = 0$, és minden más érték egyszeres.

Ha kaptunk az ellenségünktől egy neki tetsző $0 < \delta \leqslant \delta_0$ sugarat, akkor a mi lépésünk:

$$\varepsilon = \min_{|z|=\delta} \big|f(z)\big|.$$

($\varepsilon > 0$, mert a körvonalon $f \neq 0$.)

Most újra az ellenség lép: mond egy $w \in B(a, \varepsilon)$ számot.

A $|z| = \delta$ körvonalon $|f| \geqslant \varepsilon > |w|$. A Rouché-tétel miatt a $B(0, \delta)$ körlapon az $f(z) - w$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint az $f(z)$ függvénynek, vagyis pontosan k darab.

Ha $w = 0$, akkor a $f(z) = w$ egyenlet egyetlen, k-szoros megoldása a 0.

Ha $w \neq 0$, akkor a 0 nem megoldás; a k darab megoldás a $\dot{B}(0, \delta)$ pontozott körlapon van. Ott viszont $f' \neq 0$, tehát a k megoldás mindegyike egyszeres érték.

Következmény (A nyílt leképezés tétele)

Ha f holomorf és nem konstans a D tartományon, akkor D bármely nyílt részének képe nyílt.

Bizonyítás. Az kell, hogy bármely $b \in f(D)$ pont belső pontja a képhalmaznak.

Legyen $b = f(a)$, a b multiplicitása az a-ban k. A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $B(b, \varepsilon)$ minden pontját legalább k-szor felveszi f.

Ezért biztosan $B(b, \varepsilon) \subset f(D)$; a b belső pontja $f(D)$-nek.

Tétel (a lokális inverz létezése)

Legyen f holomorf az a pontban. $f(a) = b$. Az $f(z)$ függvénynek akkor és csak akkor létezik holomorf $g(w)$ lokális inverze a b pont körül, amelyre $g(b) = a$, ha $f'(a) \neq 0$.

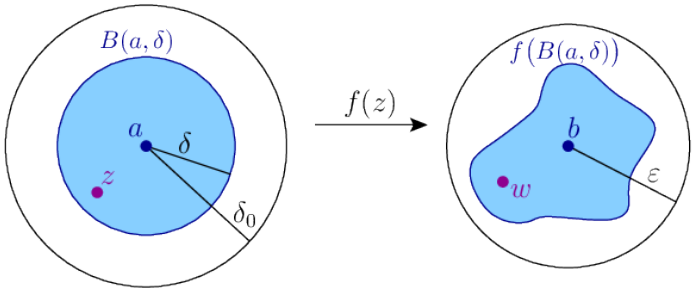
Bizonyítás. Legyen k a b multiplicitása az a pontban, és legyen δ_0 az a sugár, amelyet a lokális értékeloszlás tétele előír.

Tekintsünk egy tetszőleges $0 < \delta < \delta_0$ sugarat és a $B(a, \delta)$ körlapot. A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $w \in \dot{B}(b, \varepsilon)$ értéket f pontosan k-szor vesz fel.

$\Rightarrow$ Ha $f'(a) = 0$, akkor $k \geqslant 2$. Tetszőlegesen kicsi $B(a, \delta)$ körlapon lesz k különböző pont, ahol f értéke megegyezik, tehát f nem lehet injektív az a pont semmilyen környezetében sem.

$\Leftarrow$ Ha $f'(a) \neq 0$, akkor $k = 1$.

A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $w \in B(b, \varepsilon)$ értéket pontosan $k = 1$-szer vesz fel f a $B(a, \delta_0)$ körlapon.



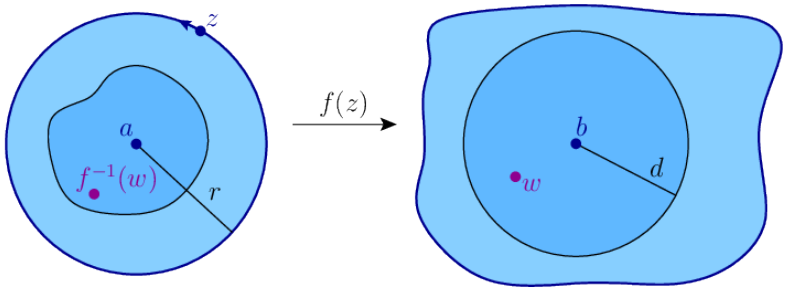
Az f folytonossága miatt van olyan $0 < \delta \leqslant \delta_0$, hogy $f\big(B(a, \delta)\big) \subset B(b, \varepsilon)$. Ezzel a választással bármely $z \in B(a, \delta)$ esetén a $w = f(z)$ számot a függvény pontosan egy helyen veszi fel a $B(a, \delta_0)$ körlapon, és ez a hely maga a z. Tehát, f injektív a $B(a, \delta)$ körlapon.

A nyílt leképezés tétele matt az $f\big(B(a, \delta)\big)$ halmaz nyílt, és az $f(z)$ úgy felelteti meg kölcsönösen egymásnak a $B(a, \delta)$ és a $f\big(B(a, \delta)\big)$ halmazokat, hogy nyílt halmazok képe nyílt, vagyis a lokális inverz $g = f^{-1}$ függvény is folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint ha g lokális inverze f-nek, $f' \neq 0$ és g folytonos b-ben, akkor g differenciálható, és $g'(f(z)) = \dfrac{1}{f'(z)}$.

Alternatív bizonyítás az inverz függvény létezésére és differenciálhatóságára

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az a pontban, $f(a) = b$ és $f'(a) \neq 0$.



Az unicitástétel miatt elég kis $r > 0$ esetén az f csak egyszer veszi fel a b értéket a $B(a,r)$ halmazon. Legyen $d = \min_{|z-a|=r} |f(z) - b|$. A Rouché-tétel miatt bármely $w \in B(b,d)$ értéket az f pontosan egyszer vesz fel a $B(a,r)$ körben, és ez a hely az általánosított argumentumelv szerint

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, \mathrm{d}z.$$

Ez a paraméteres integrál viszont differenciálható:

$$\Big(f^{-1}(w)\Big)' = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{\partial}{\partial w} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w} \right) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{z \cdot f'(z)}{\big(f(z) - w\big)^2} \, \mathrm{d}z.$$

17. Törtlineáris függvények

Törtlineáris függvények. Reprezentáció mátrixszorzással. Három pont képe egyértelműen meghatározza a törlineáris függvényt. Komplex kettősviszony. Kettősviszonytartás, körtartás, szögtartás, szimmetriatartás.

Mese

A következő néhány előadáson azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen egyszeresen összefüggő tartományok között létezik konform megfeleltetés, vagyis oda-vissza holomorf bijekció.

Definíció (törtlineáris függvény, lineáris törtfüggvény, Möbius-transzformáció)

Az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad \neq bc)$$

alakú meromorf függvényeket hívjuk törtlineáris függvénynek vagy lineáris törtfüggvénynek vagy Möbius-transzformációnak.

- Ha a Riemann-gömböt (a komplex projektív egyenest) homogén koordinátákkal koordinátázzuk, akkor az $\frac{az+b}{cz+d}$ függvénynek megfelel a $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixszal való balról szorzás.
- Ha $c \neq 0$, akkor $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ (a nevező 0) és $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Ha $c = 0$, akkor $f(\infty) = \infty$.

Trivialitások

- A függvénynek megfelelő mátrix nem nulla konstanssal való szorzástól eltekintve egyértelmű.
- Ha $f(z)$ és $g(z)$ törtlineáris függvények, egy-egy mátrix alakjuk F, illetve G, akkor $f \circ g$ mátrix alakja $F \cdot G$.
- Ha $f(z)$ törtlineáris függvény, egy mátrix alakja $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $f^{-1}(z)$ mátrix alakja $F^{-1} \sim \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
- A törtlineáris függvények csoportja a $PGL(2,\mathbb{C})$ csoport.

Tétel

- A törtlineáris függvények csoportját generálják az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$, vagyis minden törtlineáris függvény előállítható ilyenek egy sorozatának kompozíciójaként.
- Minden törtlineáris függvény bijekció a Riemann-gömbről önmagára.

Bizonyítás. (a) Ha $c = 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Ha $c \neq 0$, akkor

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{cz+d} \cdot \frac{bc-ad}{c} + \frac{a}{c}.$$

(b) A generátorelemek, tehát az eltolások, nem nulla konstanssal szorzások és az $1/z$ is bijekciók a Riemann-gömbről önmagára.

Tétel

Három pont képe egyértelműen meghatározza a törtlineáris függvényt: bármely, páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontokhoz és páronként különböző w_1, w_2, w_3 értékekhez pontosan egy olyan $f(z)$ törtlineáris függvény létezik, amelyre $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ és $f(z_3) = w_3$.

Bizonyítás. 1. Speciális eset: $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

1a. Ha z_1, z_2 és z_3 is véges: z_1 gyök és z_2 pólus, tehát $f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ valamilyen $K \neq 0$ komplex számmal. Abból, hogy $f(z_3) = 1$, az egyetlen választás $K = \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$.

1b. Ha $z_1 = \infty$: $\quad f(z) = \dfrac{0 \cdot z + K}{z - z_2}; \quad K = z_3 - z_2.$

1c. Ha $z_2 = \infty$: $\quad f(z) = K\dfrac{z - z_1}{0 \cdot z + 1}; \quad K = \dfrac{1}{z_3 - z_1}.$

1d. Ha $z_3 = \infty$: $\quad f(z) = K \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ és $K = 1$.

2. Az általános eset: legyen g és h az a két törtlineáris függvény, amelyekre $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = \infty$ és $g(z_3) = 1$, illetve $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = \infty$ és $h(w_3) = 1$; ezek után $f = h^{-1} \circ g$ megfelelő.

Az egyértelműség: Vizsgáljuk a $h \circ f$ függvényt: $h(f(z_1)) = 0$, $h(f(z_2)) = \infty$ és $h(f(z_3)) = 1$, tehát csak $h \circ f = g$ lehet, vagyis $f = h^{-1} \circ g$.

Definíció (komplex kettősviszony)

Az a, b, c, d különböző komplex számok kettősviszonya:

$$(a, b; c, d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}.$$

Ha valamelyik ∞, akkor a megfelelő tört értéke 1, avagy a határértéket vesszük ∞-ben:

$$(\infty, b, c, d) = \frac{d-b}{c-b}, \quad (a, \infty, c, d) = \frac{c-a}{d-a}, \quad (a, b, \infty, d) = \frac{d-b}{d-a}, \quad (a, b, c, \infty) = \frac{c-a}{c-b}.$$

Tétel

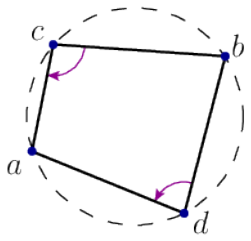
Bármely négy különböző pont, a, b, c, d akkor és csak akkor van egy körön vagy egy egyenesen, ha $\operatorname{Im}(a, b; c, d) = 0$.

("köregyenes": kör vagy egyenes. Az "egyenes" olyan kör, ami átmegy a ∞-n.)

Bizonyítás.. $\operatorname{Im}(a, b; c, d) = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$\arg \frac{c-a}{c-b} \equiv \arg \frac{d-a}{d-b} \pmod{\pi},$$

avagy irányított szögekkel $acb\measuredangle \equiv adb\measuredangle \pmod{\pi}$.



Tétel (kettősviszonytartás)

A törtlineáris függvények megtartják a kettősviszonyt: bármely $f(z)$ törtlineáris függvényre és a Riemann gömb bármely a, b, c, d különböző elemeire $\big(f(a), f(b); f(c), f(d)\big) = (a, b; c, d)$.

Bizonyítás. Elég egy generátorrendszerre és véges pontokra ellenőrizni.

A lineáris függvények megtartják az arányokat, így a kettősviszonyt is.

Az $1/z$ is megtartja a kettősviszonyt:

$$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b};\frac{1}{c},\frac{1}{d}\right)=\frac{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right)}=\frac{\frac{c-a}{-ac}\cdot\frac{d-b}{-bd}}{\frac{d-a}{-ad}\cdot\frac{d-c}{-cd}}=\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(d-c)}=(a,b;c,d).$$

Tétel (körtartás)

A törtlineáris függvények a köregyeneseket köregyenesekbe képezik.

Bizonyítás. A generátorelemek: a lineáris függvények és az $1/z$ is ilyen tulajdonságú.

Tétel (szögtartás)

A törtlineáris függvények irányítottszög-tartók (kivéve a pólust)

Bizonyítás. Ha $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, akkor

$$f'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0.$$

Megjegyzés (szög a végtelenben)

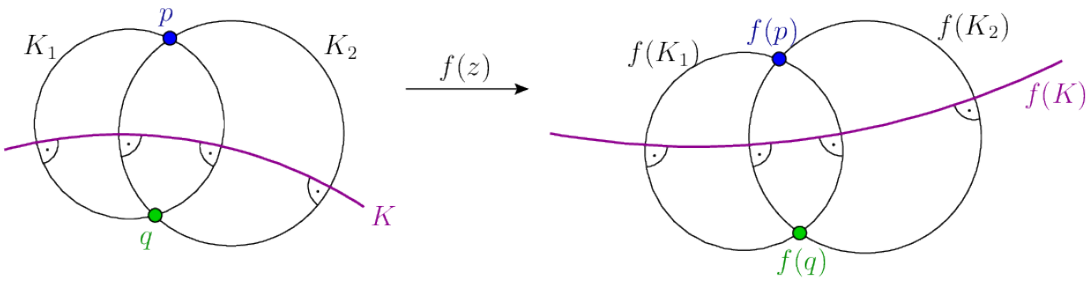
A végtelenben is lehet az irányított szöget definiálni, pl. ha a Riemann-gömbön mérjük az érintők közötti szöget. Vagy, ha a γ_1 és γ_2 görbék a ∞-ben metszik egymást, akkor ott az irányított szögük ugyanaz, mint $1/\gamma_1$és $1/\gamma_2$ görbék irányított szöge a 0-ban.

Ezzel a kiegészítéssel a pólusban és a végtelenben is szögtartók a törtlineáris függvények.

Tétel (szimmetriatartás)

A törtlineáris függvények szimmetrikus pontpárokat szimmetrikus pontpárokba képeznek:

Ha a p és q pontok szimmetrikusak a K köregyenesre (egymás tükörképei, illetve inverzei), és $f(z)$ törtlineáris függvény, akkor az $f(p)$ és $f(q)$ pontok szimmetrikusak az $f(K)$ köregyenesre.

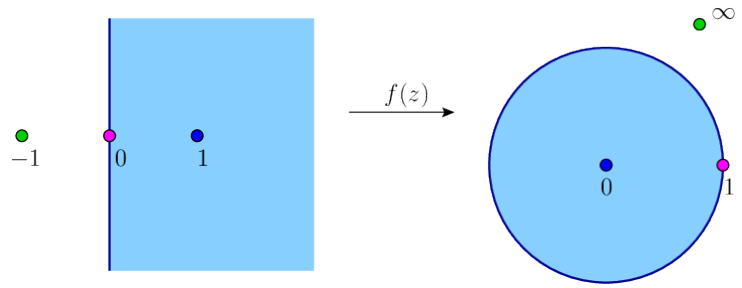


Bizonyítás. Rajzolunk még két kört p-n és q-n keresztül, K_1-et és K_2-t.

- K_1 és K_2 is szimmetrikus K-ra, tehát merőlegesen metszik K-t.
- A szögtartás miatt $f(K_1)$ és $f(K_2)$ is merőlegesen metszi $f(K)$-t.
- A $f(K_1)$ és $f(K_2)$ szimmetrikus $f(K)$-ra.
- Az $f(K_1)$ és $f(K_2)$ metszéspontjai, vagyis $f(p)$ és $f(q)$ is is szimmetrikusak $f(K)$-ra.

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely a jobb félsíkot az egységkörbe képezi úgy, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$.



A függvény a képzetes tengelyt az egységkörvonalra képezi. Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre a -1, ennek képe a 0 inverze, a ∞:

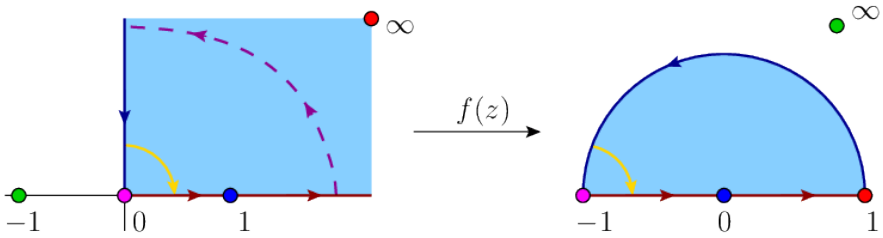
$$f(-1) = \infty.$$

$f(0) = 1$, tehát $b = d$; választhatunk $b = d = 1$-et. $f(1) = 0$, tehát $a = -1$. $f(-1) = \infty$, tehát $c = 1$.

$$f(z) = \frac{-z+1}{z+1}.$$

Példa

Írjuk fel azt a $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ törtlineáris függvényt, amely az első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi úgy, hogy $f(1) = 0$.



A negyedsík határának derékszöge van a 0-ban és a ∞-ben, csak ezeknek a képe lehet a félkör két sarka, a ± 1.

Ha a negyedsíkot levágjuk a lila görbével, akkor az argumentumelv értelmében az így kapott görbe $+1$-szer kerül minden értéket, amit a függvény felvesz. Ezért lesznek a felvett értékek a félkörvonal belsejében. Tehát, a körüljárásnak is meg kel maradnia, így csak $f(0) = 1$ és $f(\infty) = -1$ lehet. A függvénynek a valós félegyenest kell a $[-1, 1]$ átmérőre képeznie; a képzetes félegyenes képe a félkörvonal.

Az 1 tükörképe a képzetes tengelyre -1; ennek képe a 0 inverze, a ∞.

$$f(\infty) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = -1, \quad f(-1) = \infty; \qquad f(z) = \frac{1z-1}{1z+1}.$$

A $0, 1, \infty$ "körív" képe a $-1, 0, 1$ "körív". A képzetes félegyenes képe körív, a végpontjai ± 1. A körív merőleges a $[-1, 1]$ szakaszra, tehát félkörív; a derékszögek irányításából is tudjuk, hogy a felső félkör.

18. Az egységkörlemez konform automorfizmusai

Konform megfeleltetések. Az egységkör 0-t fixen hagyó automorfizmusai a forgatások. A $\frac{z\pm a}{1\pm\overline{a}z}$ alakú törtlineáris függvények. Az egységkörlemez konform automorfizmusai. A körlemezek és félsíkok konform ekvivalensek, és közöttük minden konform megfeleltetés törtlineáris függvény. Az $\frac{z\pm a}{1\pm\overline{a}z}$ alakú törtek kiemelése az egységkörben holomorf függvényekből. Véges és végtelen Blaschke-szorzatok.

Definíció

Legyen D_1 és D_2 két tartomány és $f : D_1 \to D_2$.

Az $f(z)$ konform, ha holomorf és lokálisan injektív (vagyis a deriváltja nem 0).

Az $f(z)$ biholomorf, ha holomorf és bijektív. (Ebből következik, hogy az inverze is holomorf.)

Ha $f : D_1 \to D_2$ bijektív, akkor nincs különbség. A magyar nyelvű könyvek egyszerűen csak konform(is) megfeleltetésnek nevezik a biholomorf $f : D_1 \to D_2$ bijekciókat.

(Eredetileg a "konform" szögtartót jelent: differenciálható, lokálisan injektív és szögtartó.)

Definíció

Két tartomány, D_1 és D_2 konform ekvivalens, ha létezik közöttük konform megfeleltetés, vagyis biholomorf bijekció.

Az $D \to D$ konform megfeleltetéseket D konform automorfizmusainak nevezzük.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Bizonyítás. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a "csak") a kérdés.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa az egységkörnek, és $f(0) = 0$.

A Schwarz-lemma szerint $|f'(0)| \leqslant 1$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $f(z)$ forgatás.

Legyen $g = f^{-1}$. Ez is konform automorfizmus és $g(0) = 0$, tehát $|g'(0)| \leqslant 1$.

Az inverz függvény differenciálási szabálya miatt $f'(0) \cdot g'(0) = 1$.

Mindez csak úgy lehetséges, ha $|f'(0)| = |g'(0)| = 1$, és f és g is forgatás.

Lemma

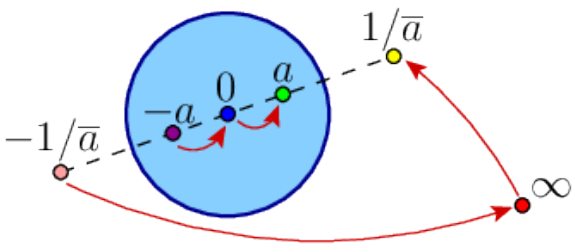
Legyen $|a| < 1$ és

$$\varphi(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$



Bizonyítás. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.

Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1+\overline{a}z| = |\overline{z}z+\overline{a}z| = |\overline{z}+\overline{a}| = |z+a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.

A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.

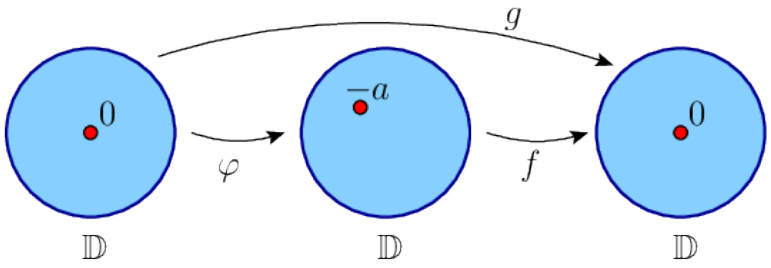
Az inverzt akár ki is lehet számolni, de 4 pont képét is ellenőrizhetjük: $\varphi^{-1}(a) = 0$, $\varphi^{-1}(0) = -a$; a tükörképekre $\varphi^{-1}(1/\overline{a}) = \infty$, $\varphi^{-1}(\infty) = -1/\overline{a}$.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$ alakú törtlineáris függvények, ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Bizonyítás. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

A $g = f \circ \varphi$ egy olyan automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, amelyre $g(0) = f(\varphi(0)) = f(-a) = 0$.

Tehát g egy forgatás, $g(z) = \varepsilon z$ valamilyen egységnyi ε-nal.

$$f(z) = g(\varphi^{-1}(z)) = \varepsilon \cdot \varphi^{-1}(z) = \varepsilon \cdot \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

Tétel

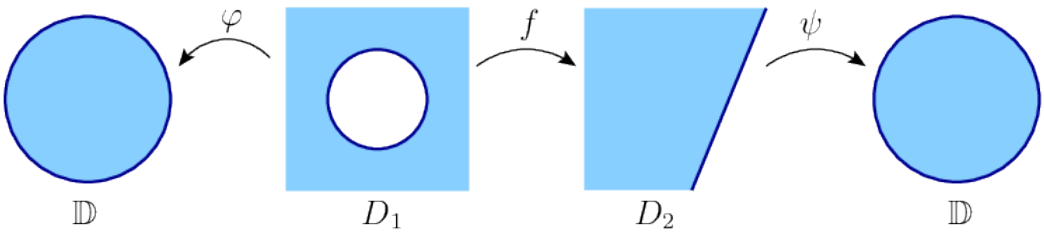
- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés törtlineáris függvény.

Bizonyítás. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.

Az így kapott leképezés törtlineáris függvény.

(b) Tegyük fel, hogy f konform megfeleltetés a D_1 és D_2 körlemezek vagy félsíkok között.

Legyen $\phi : D_1 \to \mathbb{D}$ és $\psi : D_2 \to \mathbb{D}$ egy-egy törtlineáris függvény, amely megfeleltetés az egységkörrel.



A $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ az egységkörnek konform automorfizmusa, tehát törtlineáris függvény.

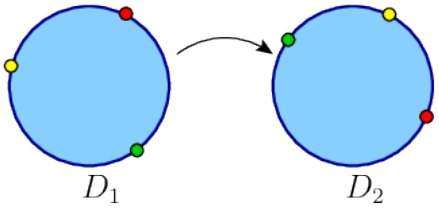
Akkor viszont $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ is törtlineáris függvény.

Tétel

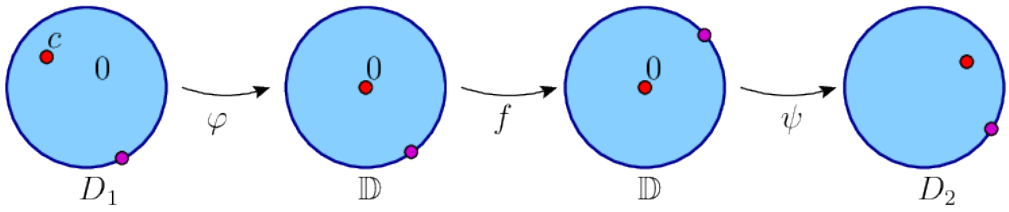
Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya. (A derivált abszolút értéke egyértelmű.)

Bizonyítás. (a) A 3 pont meghatározza a kört; a sorrend meghatározza, hogy a kép kívül van, vagy belül.



(b) Elég az egységkörlemezre bizonyítani; $\dfrac{z+a}{1-\overline{a}z}$ alakú függvényekkel kombinálva elérhetjük, hogy a megadott pont és a képe is a 0 legyen; utána a megadott határpont megmondja, hogy melyik forgatásról van szó.

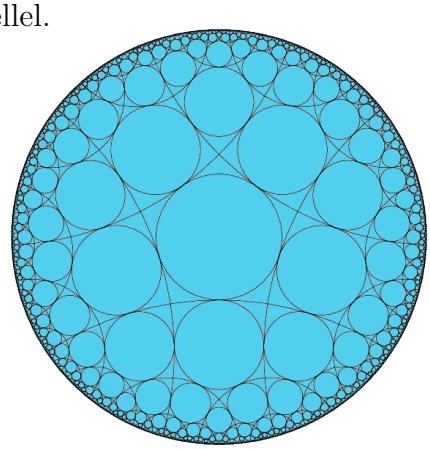


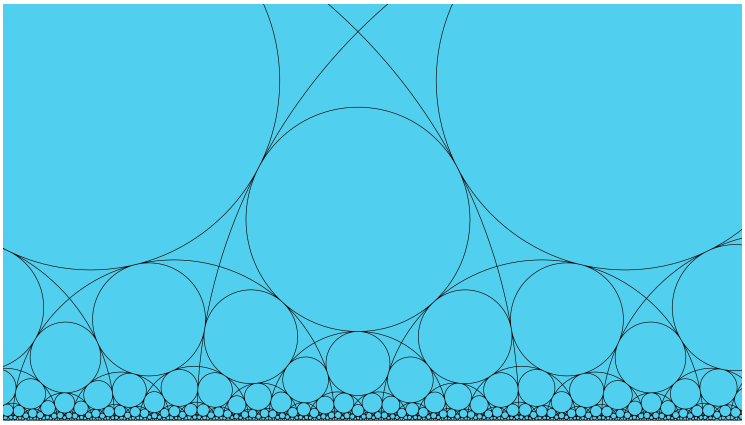
(c) Ugyanaz, mint a (b), csak a forgatást nem egy határpont, hanem derivált iránya mondja meg:

$$\big(\psi \circ f \circ \varphi\big)'(c) = \psi'(0) \cdot f'(0) \cdot \varphi'(c).$$

Mese

Az egységkörlemezt szeretjük azonosítani a Poincaré-féle körmodellel, a felső félsíkot pedig a félsík-modellel.





A konform automorfizmusok a modellek irányítástartó egybevágóságai.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a.

Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Bizonyítás.. A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \leqslant \left(\max_{|z|=r} |g(z)| \right),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \geqslant \max_{|z|=r} |g(z)| \cdot \min_{|z|=r} \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|,$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \geqslant \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Következmény

Az egységkörben holomorf függvényekből kiemelhetők az $\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ alakú "gyöktényezők" úgy, hogy a függvény szuprémuma nem változik meg.

Ha n gyök van: $a_1, \ldots, a_n$, akkor kiemelhetjük a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$$

szorzatot.

Az ilyen típusú szorzatokat véges Blaschke-szorzatoknak nevezzük.

Ugyanígy pólusokat is megszüntethetünk az $\frac{1-\overline{a}z}{z-a}$ alakú törtek kiemelésével.

Mese: Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom	**véges Blaschke-szorzat**
$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)$	$\varepsilon \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$
(a sík irányítástartó egybevágóságainak szorzata)	(a körmodell irányítástartó egybevágóságainak szorzata)
Pl. Gauss–Lucas tétel: Ha f legalább másodfokú polinom, akkor f gyökeinek konvex burka tartalmazza f' gyökeit.	Ha f legalább kéttényezős Blaschke-szorzat, akkor f gyökeinek a körmodellben vett konvex burka tartalmazza f'-nek az egységkörbe eső gyökeit.
Pl. a polinomok jellemzése: ha $f(z)$ egészfüggvény, és $\lim_{z\to\infty} = \infty$, akkor $f(z)$ polinom.	Ha $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf, és $\lim_{\lvert z\rvert\to 1-0} = 1$, akkor $f(z)$ véges Blaschke-szorzat.

Mese: Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z} \right).$$

Ettől legalább a 0-ban konvergens, és tetszés szerint átrendezhető a szorzat.

Tétel (végtelen Blaschke-szorzat konvergenciája)

- A Blaschke-szorzat lokálisan egyenletesen konvergens.
- Ha $\sum_{k=1}^{\infty} \big(1-|a_k|\big) = \infty$, akkor Blaschke-szorzat a konstans 0.
- Ha $\sum_{k=1}^{\infty} \big(1-|a_k|\big) < \infty$, akkor Blaschke-szorzat nem a konstans 0, és a gyökei $a_1, a_2, \ldots$, továbbá $m > 0$ esetén a 0.

19. Riemann-alaptétel

Riemann-alaptétel. Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörlemezzel. Hurwitz-tétel. Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze. A Riemann-alaptétel bizonyítása.

Tétel (A konform leképezések alaptétele; Riemann-alaptétel)

Legyen $D \neq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $z_0 \in D$. Ekkor létezik egy egyértelmű $f : D \to \mathbb{D}$ konform megfeleltetés, amelyre $f(z_0) = 0$ és $f'(z_0)$ pozitív valós.

Következmény

Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens.

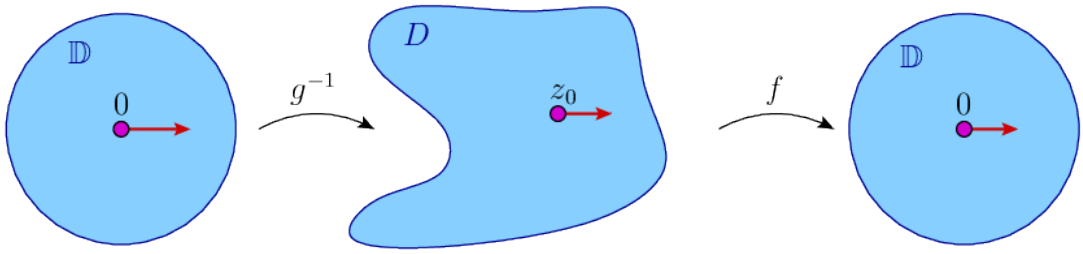
Megjegyzés

A tételben a kivétel a teljes sík. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörrel, mert ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorf, akkor a Liouville-tétel miatt csak konstans lehet.

Az egyértelműség bizonyítása

Tegyük fel, hogy $f(z)$ és $g(z)$ olyan $D :\to \mathbb{D}$ konform megfeleltetések, amelyekre $f(z_0) = g(z_0) = 0$, valamint $f'(z_0)$ és $g'(z_0)$ is pozitív valós. Azt kell igazolnunk, hogy $f = g$.

Vizsgáljuk a $\varphi = f \circ g^{-1}$ leképezést.



- A φ konform automorfizmusa egységkörnek,
- $\varphi(0) = 0$, és
- $\varphi'(0) = f'(z_0) \cdot \left(g^{-1}\right)'(0) = f'(z_0) \cdot \dfrac{1}{g'(z_0)}$ pozitív valós.

Ez egyértelműen meghatározza a φ konform automorfizmust: $\varphi(w) = w$, vagyis $f = g$.

A fő ötlet

Legyen

$$\mathcal{F}_0 = \Big\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ holomorf}, \ f(0) = 0 \Big\}.$$

A Schwarz-lemma szerint:

- Bármely $f \in \mathcal{F}_0$ esetén $|f'(0)| \leqslant 1$.
- Bármely $f \in \mathcal{F}_0$ akkor és csak akkor automorfizmusa az egységkörnek, ha $|f'(0)| = 1$.

Tehát: $f \in \mathcal{F}_0$ akkor és csak akkor konform automorfizmus, ha $|f'(0)|$ maximális.

A Riemann-alaptétel bizonyításához legyen

$$\mathcal{F} = \Big\{ f : D \to \mathbb{D} \text{ holomorf és injektív, } f(z_0) = 0,\ f'(z_0) \text{ pozitív valós} \Big\}.$$

Olyan $f_0 \in \mathcal{F}$ függvényt fogunk választani, amelyre $f_0'(z_0)$ maximális.

Segédtételek

A logaritmus- és a hatványfüggvények létezése

Ha D egyszeresen összefüggő, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf és $f \neq 0$, akkor D-n létezik $\log f$-nek és minden α-ra f^α-nak holomorf ága D-n.

Weierstrass-tétel

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és $f_n(z) \to g(z)$ lokálisan egyenletesen, akkor g holomorf és $f_n'(z) \to g'(z)$ lokálisan egyenletesen.

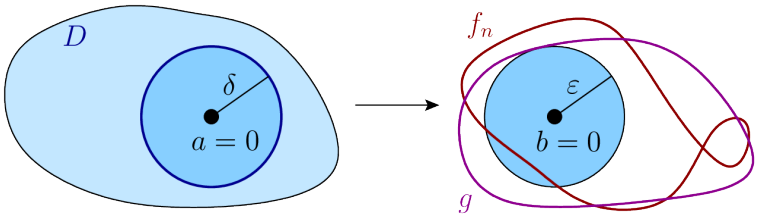
Vitali–Motel tétel

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak, és egyenletesen korlátosak, akkor kiválasztható közülük lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.

Hurwitz tétele

Tfh. $g, f_1, f_2, \ldots$ holomorf a D tartományon, $f_n \to g$ lokálisan egyenletesen, $a \in D$ és $b = g(a)$. Ekkor g vagy konstans, vagy az a bármilyen kis környezetében, elég nagy n-re az $f_n(z)$ függvény felveszi a b értéket:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \exists w \in B(a, \delta) \cap D \quad f_n(w) = b.$$



Bizonyítás. Feltehető, hogy $a = b = 0$.

Legyen δ_0 olyan sugár, hogy $\overline{B}(0, \delta_0) \subset D$, és a $0 < |z| \leqslant \delta_0$ körlapon $g \neq 0$. Ha ilyen sugár nincs, akkor g gyökei torlódnak a 0-ban, de akkor az unicitástétel miatt g konstans.

Tekintsünk egy tetszőleges $0 < \delta < \delta_0$-t, és legyen $\varepsilon = \min\limits_{|z|=\delta} \big|g(z)\big|$.

Az egyenletes konvergencia miatt van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$-ra, a $|z| = \delta$ körvonalon

$$\big|g(z) - f_n(z)\big| < \varepsilon \leqslant \big|g(z)\big|.$$

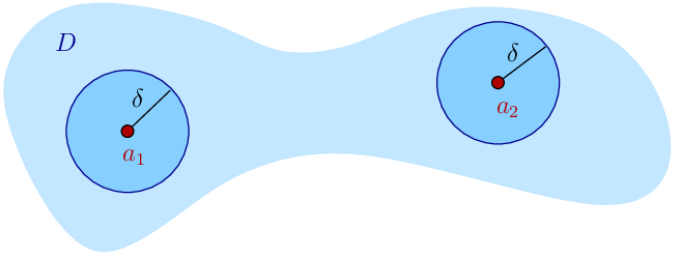
A Rouché-tétel miatt a $|z| < \delta$ körben a $f_n(z)$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint a $g(z)$ függvénynek, vagyis legalább egy.

Következmény

Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze vagy konstans, vagy injektív: ha $g, f_1, f_2, \ldots$ holomorf a D tartományon, mindegyik f_n injektív és $f_n \to g$ lokálisan egyenletesen, akkor g vagy konstans, vagy injektív.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy g nem konstans, és nem is injektív.

Legyen $a_1, a_2 \in D$ két különböző pont D-ben, amelyekre $g(a_1) = g(a_2) = b$.



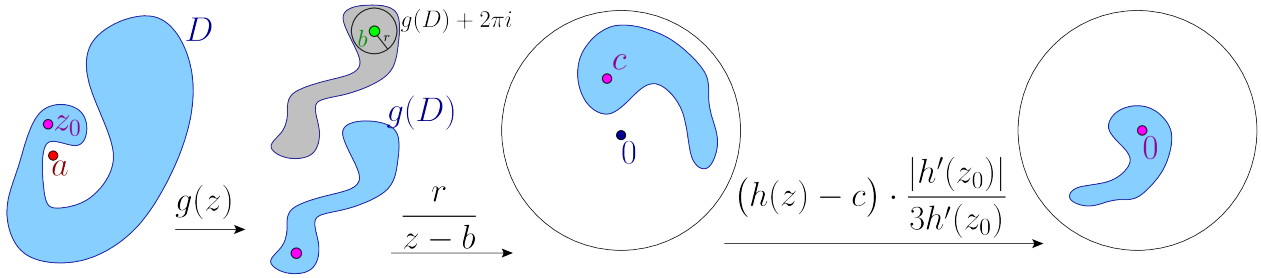
Válasszunk olyan δ-t, amelyre a $B(a_1, \delta)$ és $B(a_2, \delta)$ diszjunktak, és részei D-nek.

A Hurwitz-tétel miatt vannak olyan n_1 és n_2 küszöbindexek, hogy $n > n_1$ esetén $b \in f_n\big(B(a_1, \delta)\big)$ és $n > n_2$ esetén $b \in f_n\big(B(a_2, \delta)\big)$.

Ha $n > \max(n_1, n_2)$, akkor $f_n(z)$ mindkét körlapon felveszi a b értéket; de ez ellentmond annak, hogy f_n injektív. ↯

A Riemann-alaptétel bizonyítása, 1. lépés

Állítás: A $\mathcal{F} = \Big\{ f : D \to \mathbb{D}$ holomorf és injektív, $f(z_0) = 0$, $f'(z_0)$ pozitív valós$\Big\}$ halmaz nem üres.



Bizonyítás. $D \neq \mathbb{C}$, vagyis van olyan a komplex szám, amelyre $a \notin D$. Legyen $g(z) = \log(z - a)$ a logaritmus valamelyik holomorf ágával. Bármely számnak legfeljebb egy logaritmusát veszi fel g, tehát g-nek nem lehet értéke a $g(D) + 2\pi i$ halmazban. Ez a halmaz nyílt; legyen $B(b, r)$ egy körlap a $g(D) + 2\pi i$ halmazban; ekkor tehát $|g(z) - b| \geqslant r$.

Ezek után legyen $h(z) = \dfrac{r}{g(z) - b}$; erre $|h| \leqslant 1$. A h injektív, tehát a deriváltja nem nulla.

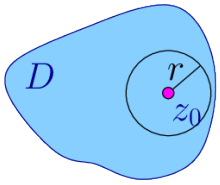
Legyen $c = h(z_0)$ és $f(z) = \big(h(z) - c\big) \cdot \dfrac{|h'(z_0)|}{h'(z_0)} \cdot \dfrac{1}{3}$. Erre a függvényre $|f(z)| \leqslant \big(|h(z)| + c\big) \cdot \frac{1}{3} < 1$, $f(z_0) = 0$ és $f'(z_0) = \dfrac{|h'(z_0)|}{3}$, ami pozitív valós. Tehát, $f \in \mathcal{F}$.

2. lépés

Állítás: Legyen $M = \sup\big\{ f'(0) : \ f \in \mathcal{F} \big\}$. Ekkor $0 < M < \infty$.

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$ nemüres, van olyan f eleme, amelyre $f'(z_0) > 0$; ezért $M \geqslant f'(z_0) > 0$.

Az z_0 belső pontja D-nek; legyen $r > 0$ olyan, hogy $\overline{B}(z_0, r) \subset D$.



Bármely $f \in \mathcal{F}$ esetén $|f| < 1$, így

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, \mathrm{d}z \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{1}{r},$$

ezért $M \leqslant \dfrac{1}{r}$.

3. lépés

Állítás: Van olyan $f_0 \in \mathcal{F}$, amelyre $f_0'(z) = M$. Vagyis, $M = \max\{f'(0) : \ f \in \mathcal{F}\}$.

Bizonyítás. A szuprémumhoz tarthatunk alulról, így biztosan vannak olyan $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{F}$ függvények, amelyekre $f_n'(z_0) \nearrow M$.

Ezek a függvények az egységkörbe képeznek, ezért egyenletesen korlátosak. A Vitali–Montel tétel szerint kiválasztható közülük egy lokálisan egyenletesen konvergens $f_{n_1}, f_{n_2} \ldots$ részsorozat. Ennek limesze legyen f_0.

A Weierstrass-tétel miatt $f_0 = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}$ holomorf, és $f_{n_k}' \to f_0'$ lokálisan egyenletesen; speciálisan a z_0 pontban $f_0'(z_0) = \lim f_{n_k}'(z_0) = M$.

Az f_0 az f_{n_k} injektív függvények lokálisan egyenletes limesze, tehát f_0 vagy konstans, vagy pedig injektív. De az f_0 nem lehet konstans, mert például $f_0'(z_0) = M > 0$. Tehát f_0 injektív.

Mivel $|f_n| < 1$, az biztos, hogy $|f_0| = \lim\limits_{k\to\infty} |f_{n_k}| \leqslant 1$; de mivel f_0 nem konstans, a maximum-elv miatt (vagy a nyílt leképezés tétele miatt) az is igaz, hogy $|f_0| < 1$.

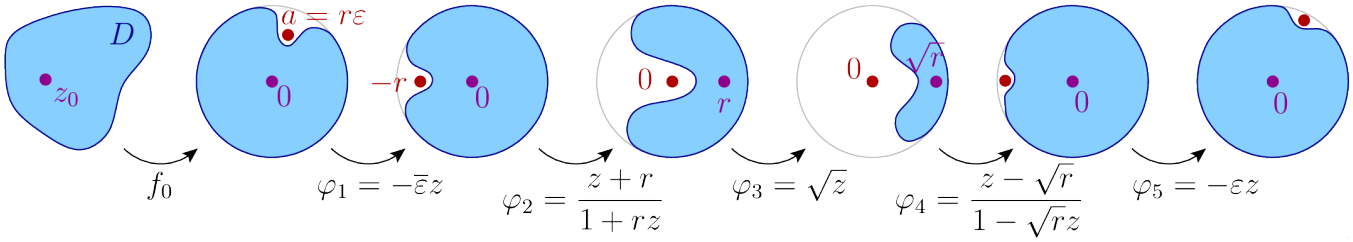
Ezek után $f_0 : D \to \mathbb{D}$ holomorf és injektív, és $f_0'(z_0) = M$.

4. (utolsó) lépés

Állítás: f_0 szürjektív: $f_0(D) = \mathbb{D}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f_0 nem szürjektív; van egy olyan $a \in \mathbb{D}$ érték, amit nem vesz fel. Az a nem lehet a 0, mert $f_0(z_0) = 0$. Írjuk a-t $r\varepsilon$ alakban, ahol $0 < r < 1$ és ε egységnyi komplex szám.

Legyen $g(z)$ a következő leképezéseknek a kompozíciója:



$\varphi_1(z) = -\bar{\varepsilon} z$; ez az a-t a $(-r)$ pontba forgatja.

$\varphi_2(z) = \frac{z+r}{1+rz}$; a $\mathbb{D}$ automorfizmusa, a $(-r)$ képe a 0, a 0 képe az r.

φ_3 a $\varphi_2(\varphi_1(f_0(D)))$ halmazon a $\sqrt{z}$-nek az a holomorf ága, amely r-et $\sqrt{r}$-be képezi. A $\varphi_2(\varphi_1(f_0(D)))$ halmaz egyszeresen összefüggő, nyílt, nem tartalmazza a 0-t, így létezik rajta $\sqrt{z}$.

$\varphi_4(z) = \frac{z-\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}z}$; a $\mathbb{D}$ automorfizmusa, a $\sqrt{r}$ képe a 0.

$\varphi_5(z) = -\varepsilon z$; az első forgatás inverze.
A $g = \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ f_0$ függvény is holomorf és injektív $D \to \mathbb{D}$ leképezés, $g(z_0) = 0$.
A deriváltak értékei:

- $f_0'(z_0) = M$;
- $\varphi_1'(0) = -\overline{\varepsilon}$;
- $\varphi_2'(z) = \dfrac{1 \cdot (1 + rz) - r \cdot (z + r)}{(1 + rz)^2} = \dfrac{1 - r^2}{(1 + rz)^2}$, tehát $\varphi_2'(0) = 1 - r^2 = (1 + r)(1 - r)$;
- $\varphi_3'(r) = \dfrac{1}{2\sqrt{r}}$;
- $\varphi_4'(z) = \dfrac{1 \cdot (1 - \sqrt{r}z) + \sqrt{r} \cdot (z - \sqrt{r})}{(1 - \sqrt{r}z)^2} = \dfrac{1 - r}{(1 - \sqrt{r}z)^2}$ és $\varphi_4'(\sqrt{r}) = \dfrac{1}{1 - r}$;
- $\varphi_5'(0) = -\varepsilon$.

Összeszorozva: $g'(z_0) = f_0'(z_0) \cdot \varphi_1'(0) \cdot \varphi_2'(0) \cdot \varphi_3'(r) \cdot \varphi_4'(\sqrt{r}) \cdot \varphi_5'(0) = M \cdot \dfrac{1 + r}{2\sqrt{r}}$ szintén pozitív valós, tehát $g \in \mathcal{F}$. A számtani-mértani miatt $1 + r > 2\sqrt{r}$, de akkor $g'(z_0) > M$. ↯

Alternatív befejezés:

A φ_3 inverze a z^2, kiterjeszthető az egész egységkörre. A

$$h = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_3^{-1} \circ \varphi_4^{-1} \circ \varphi_5^{-1}$$

egy holomorf $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ függvény, de nem injektív.

A Schwarz-lemma miatt $|h'(0)| < 1$, tehát

$$|g'(z_0)| = \left| \frac{f_0'(z_0)}{h'(0)} \right| > \frac{M}{1} = M. \qquad \text{↯}$$

20. A tükrözési elv

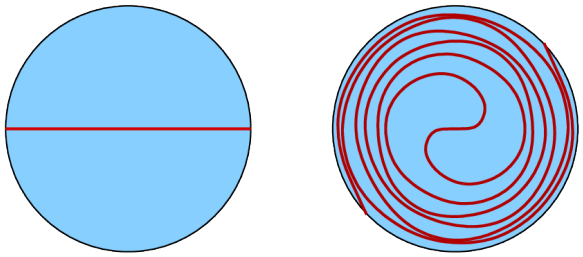
Caratheodory tétele (bizonyítás nélkül). Tükrözési elv. Tükrözés körvonalakra. Bizonyítás a kis Picard-tételre

Caratheodory-tétel

Ha D_1 és D_2 Jordan-tartományok (egy-egy egyszerű zárt görbe belseje), és $f : D_1 \to D_2$ konform megfeleltetés közöttük, akkor f kiterjeszthető $\overline{D_1} \to \overline{D_2}$ homeomorfizmussá.

Példa

Konform megfeleltetés helyett diffeomorfizmussal nem igaz, pl.



$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad f(re^{it}) = re^{it+\frac{i}{1-r^2}}$$

Következmény

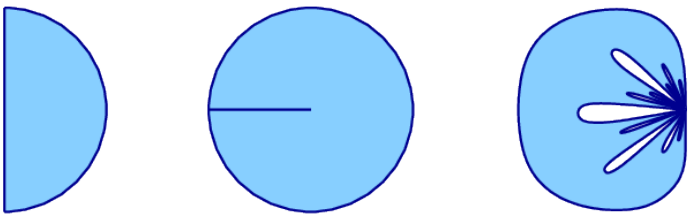
Ha D_1 és D_2 Jordan-tartományok (egy-egy egyszerű zárt görbe belseje), akkor a $D_1 \to D_2$ konform megfeleltetéseket egyértelműen meghatározza

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya.

Kiterjesztések

- Több egyszerű, zárt görbével határolt tartományok

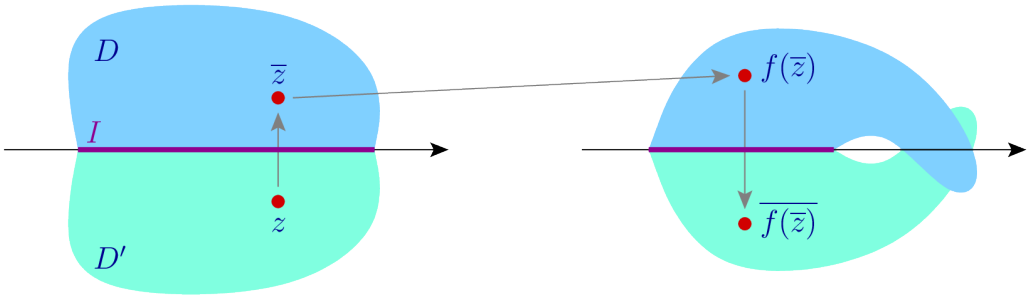
- Többszörös határpontok



Tükrözési elv

Legyen D tartomány a felső félsíkban, amelynek a határa tartalmazza az I intervallumot, és legyen D' a D tükörképe a valós tengelyre.

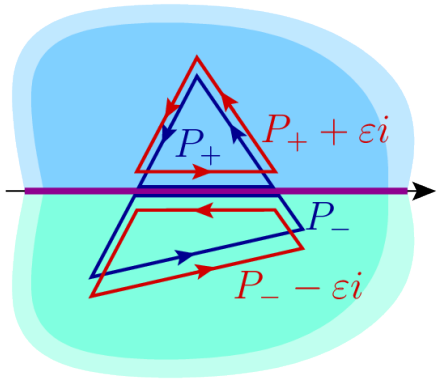
Tegyük fel, hogy f holomorf D-n, folytonos $(D \cup I)$-n, és I pontjaiban $\operatorname{Im} f = 0$. Ekkor f holomorfan kiterjeszthető (folytatható) a $D_1 = (D \cup I \cup D')$ tartományra úgy, hogy a D' pontjaiban $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$.



Bizonyítás. Az I pontjaiban a két képlet ugyanazt adja, így a kiterjesztett függvény folytonos D_1-en. Azt is tudjuk, hogy holomorf D-n és D'-n.

Annak bizonyításához, hogy f holomorf, elég a Morera-tételt ellenőrizni olyan D_1-beli háromszögekre, amelyeknek van pontja I-n.

Vágjuk el I-vel a háromszöget, és szűkítsük a tartományt úgy, hogy a maradék is tartalmazza a háromszöglemezt, és f egyenletesen folytonos legyen. A háromszög két fele, P_+ és P_- egy-egy zárt poligon az $D \cup I$, illetve a $D \cup I$ halmazban; elég azt igazolni, hogy mindkét poligonon 0 a vonalintegrál.



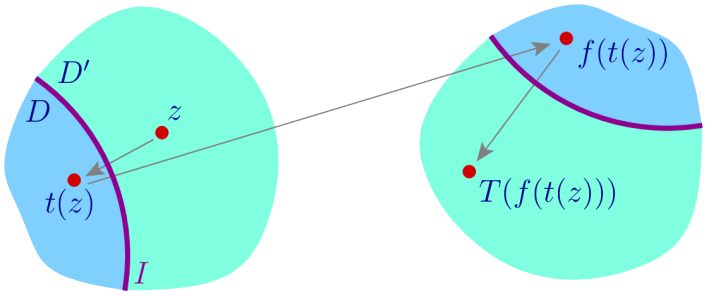
Ha a P_+ poligont εi-vel eltoljuk a felső tartomány belsejébe, akkor a vonalintegrál 0 lesz; az egyenletes folytonosság miatt

$$\int_{P_+} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{P_+} f(z+\varepsilon i)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{P_+ + \varepsilon i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

és ugyanígy $\int_{P_-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Akinek kalapácsa van...

Mire lehetne még tükrözni?



- Az I lehet egy másik egyenes tetszőleges szakasza
- Az I lehet egy körív. (A középpontba nem terjeszt ki)
- Az f függvény I pontjaiban megengedett értékei lehetnek egy másik egyenes pontjai
- Az f függvény I pontjaiban megengedett értékei lehetnek egy kör pontjai, de a középpont képe ∞ lesz.

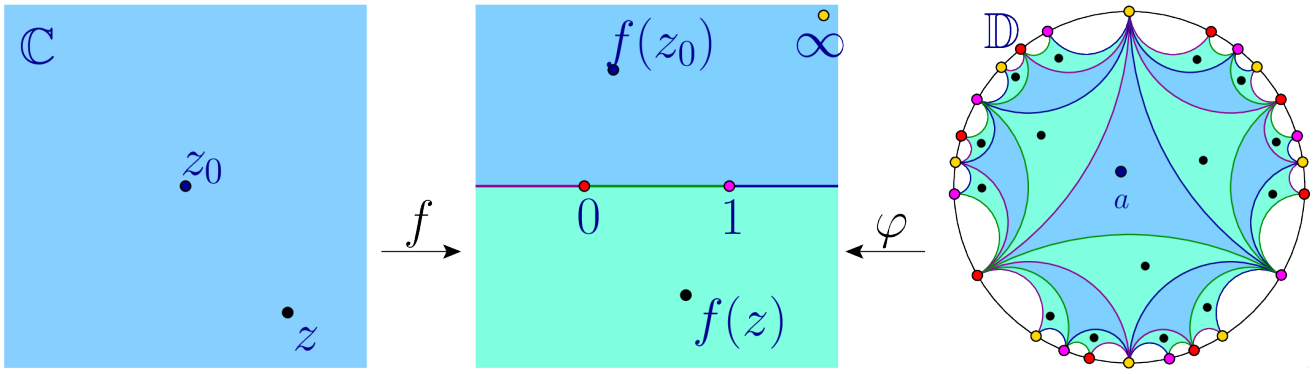
kis Picard-tétel

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor legfeljebb egy kivétellel minden komplex értéket felvesz.

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy nincs olyan f egészfüggvény, ami nem veszi fel a $0, 1$ értékeket.

Vegyünk fel az egységkör (a körmodell) határán három pontot, és ezeket kössük össze, az egységkörre merőleges körívekkel. Legyen φ az a konform megfeleltetés, amely a három körív közötti "végtelen" háromszöget megfelelteti a felső félsíknak úgy, hogy a három csúcs képe a 0, az 1 és a ∞.

A háromszöget mindegyik oldalívére tükrözzük, és a φ függvényt kiterjesztjük a tükörképekre. Ezt ismételjük újra meg újra; ilyen módon az egész egységkört kicsempézzük a háromszög tükörképeivel, és a φ függvényt kiterjesztjük az egész egységkörön holomorf függvénnyé.



Bármelyik két szomszédos háromszöget és a közöttük futó körívet φ megfeleltet egy olyan tartománynak, amely a két félsíkból és a $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumok valamelyikéből áll.

Jelöljünk ki egy z_0 pontot, amelyre $f(z_0)$ a felső félsíkban van, tehát φ szerinti egyik ősképe, a az eredeti háromszögben van. Most bármely z pont esetén definiálni fogunk egy $F(z)$ pontot az egységkörben úgy, hogy $\varphi(F(z)) = f(z)$.

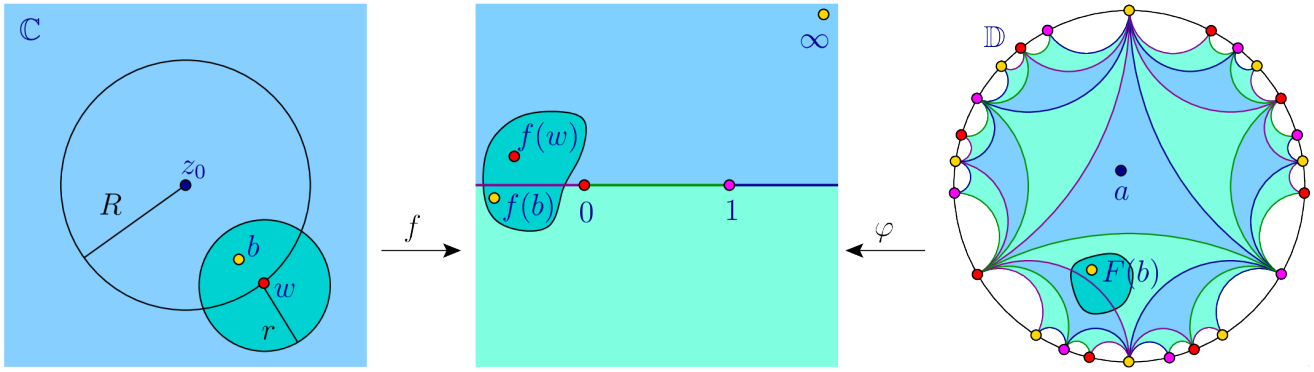
Legyen $R = \sup\Big\{r : \text{létezik olyan } F : B(z_0, r) \to \mathbb{D} \text{ holomorf, amire } F(z_0) = a \text{ és } \varphi(F(z)) = f(z)\Big\}$.

A z_0 egy környezetében $F = \varphi^{-1} \circ f$ megfelelő, tehát $R > 0$.

Az unicitástétel miatt az $F(z)$ értelmes a $B(z_0, R)$ körlapon.

1. eset: R véges.

Ha $|w - z_0| = R$, akkor van olyan $B(w, r)$ körlap, hogy $f(B(w, r))$ a lila, zöld és kék szakaszok közül legfeljebb csak egyet metsz, az X színűt. Vegyünk egy $b \in B(z_0, R) \cap B(w, r)$ pontot; ennek képe $F(w)$ az egyik háromszögben van; ha hozzávesszük az X színű oldalát és az mellette levő tükörkép háromszöget, a kettőt együtt φ megfelelteti a két félsíknak és az X színű szakasznak. Ennek a lokális φ-nek az inverzével F folytatható a $B(w, r)$ körlapra: $F(z) = \varphi^{-1}(f(z))$.



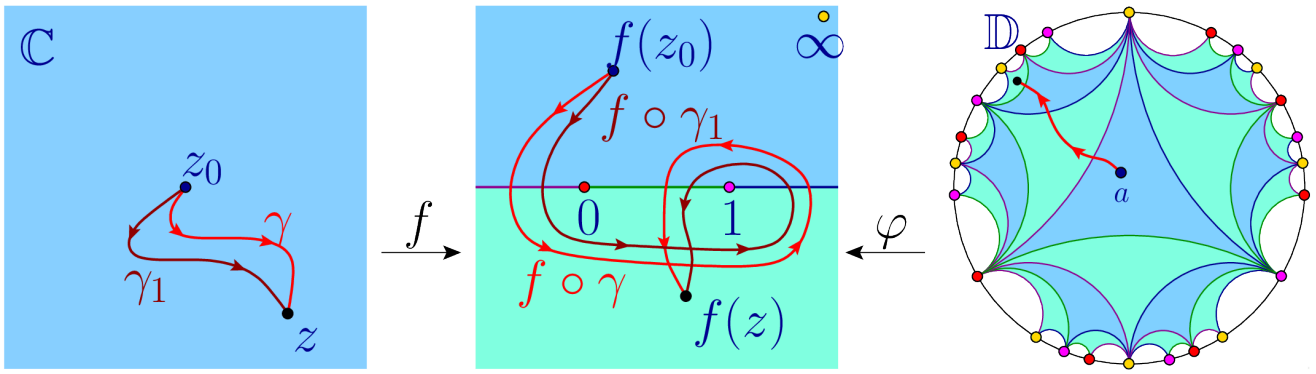
Az $|w - z_0| = R$ körvonal minden pontja körül tudjuk folytatni a függvényt egy kis (mikiegérfül alakú) körben. A kompaktság miatt ezek közül véges sok is lefedi a körvonalat. A szomszédos köröcskék metszete a nagy körbe is belemetsz, így a kétféle folytatás egy közös folytatást ad. Ezért

a fülek egy közös folytatást adnak egy kicsivel nagyobb körre. De akkor az F folytatható egy R-nél nagyobb körre is. ↯

2. eset: $R = \infty$.

Ekkor F korlátos egészfüggvény, ezért konstans. De akkor $f = \varphi \circ F$ is konstans. ↯

Az előbbi bizonyítást úgy is elmondhatjuk, hogy ha összekötjük z_0-t és z-t egy γ görbével, akkor ezt a görbét a lokális φ^{-1} függvények segítségével az egységkörbe képezhetjük.

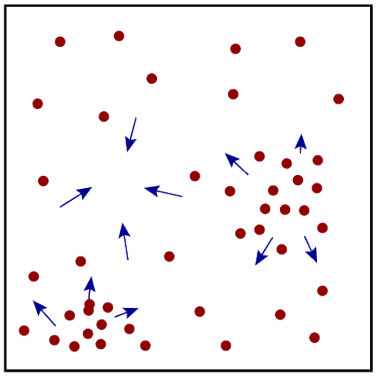


Ha egy másik, γ_1 görbével kötjük össze z_0-t és z-t, akkor ugyanezt az $F(z)$ értéket kapjuk. Ugyanis γ és γ_1 homotóp $\mathbb{C}$-ben, emiatt $f \circ \gamma$ és $f \circ \gamma_1$ is homotóp a $C \setminus \{0, 1\}$ halmazban. Emiatt $f \circ \gamma$ és $f \circ \gamma_1$ ugyanabban a sorrendben metszi át a lila, a zöld és a kék szakaszokat, ez a lila–zöld–kék sorozat meghatározza, hogy melyik csempében lesz a végpont.

21. Harmonikus függvények

Laplace-operátor, harmonikus függvények. Laplace-egyenlet. Egy függvény akkor és csak akkor harmonikus, ha lokálisan egy holomorf függvény valós része. Maximum- és minimum-elv. Poisson-formula.

Mese a hullámokról



Hullámegyenlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}\right) = c^2 \cdot \Delta u$$

Laplace-operátor:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2} \quad (= \operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla^2)$$

Definíció

- Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő, nyílt, és $u : D \to \mathbb{R}$. Az f függvény harmonikus, ha kétszer differenciálható, és teljesül rá a Laplace-egyenlet:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} = 0.$$

- Két változóban: $D \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő, nyílt. Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény harmonikus, ha kétszer differenciálható, és

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- Szeretjük a $\mathbb{R}^2$ síkot a komplex számsíkkal azonosítani, és erre jó okunk van.

Trivialitás

Bármely $D \subset \mathbb{R}^n$ tartományra a harmonikus $D \to \mathbb{R}$ függvények vektorteret alkotnak.

Most csak a kétváltozós harmonikus függvényekkel fogunk játszani.

Tétel

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$. Az u akkor és csak akkor harmonikus, ha egy holomorf függvény valós része, vagyis van olyan $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelyre $u = \operatorname{Re} f$.

Következmény

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$. Az u akkor és csak akkor harmonikus, ha D minden pontjának van olyan környezete, ahol u egy holomorf függvény valós része.

Bizonyítás. (a) állítás: Ha u egy holomorf függvény valós része, akkor harmonikus:

Legyen $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$; a Cauchy–Riemann egyenletekből

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}v\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial}{\partial y}u\right) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}u$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 0.$$

Bizonyítás. (b) állítás: Ha u harmonikus, akkor egy holomorf függvény valós része:

Emlékeztetőül, ha $f = u + iv$ és $f' = U + iV$, akkor

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad V = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Először f deriváltját találjuk ki. Legyen

$$U = \frac{\partial}{\partial x}u, \quad V = -\frac{\partial}{\partial y}u \quad \text{és} \quad g = U + iV.$$

A g holomorf, mert differenciálható, és teljesülnek a Cauchy–Riemann egyenletek:

$$\frac{\partial}{\partial x}U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial}{\partial y}u\right) = \frac{\partial}{\partial y}V, \qquad \frac{\partial}{\partial y}U = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial y}u\right) = -\frac{\partial}{\partial x}V.$$

Legyen $f(z)$ a $g(z)$-nek egy olyan primitív függvénye, amelyre legalább egy pontban $f = u$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Re} f) = \operatorname{Re} f' = U = \frac{\partial}{\partial x}u, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{Re} f) = -\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{Im} f) = -\operatorname{Im} f' = -V = \frac{\partial}{\partial y}u,$$

tehát $\operatorname{Re} f = u$.

Példák

Ezek mind harmonikus függvények:

- Minden lineáris függvény;
- $\arg z = \operatorname{Im}(\log z) = \operatorname{Re}(-i \cdot \log z)$ (olyan halmazon, amely nem kerüli meg a 0-t;
- $\log|z| = \operatorname{Re}\log z$. Ez a függvény az egész $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ halmazon harmonikus, de nincs az egész halmazon olyan holomorf f, aminek $\log|z|$ lenne a valós része.
- Ha f holomorf, akkor $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\log|f|$, $\arg f$ is harmonikus.

Középérték-tulajdonság

Ha u harmonikus D-ben, akkor bármely $\overline{B}(c,r)$ körlemezre

$$u(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(c + re^{it}\big)\,\mathrm{d}t.$$

Bizonyítás. A valós rész operáció felcserélhető az integrálással. Ha $u = \operatorname{Re} f$, akkor

$$u(c) = \operatorname{Re} f(c) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(c + re^{it}\big)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\operatorname{Re} f\big(c + re^{it}\big)\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\big(c + re^{it}\big)\,\mathrm{d}t.$$

Megfordítás?

Ez a tulajdonság önmagában leírja a harmonikus függvényeket. (Később.)

Maximum- és minimumelv

Ha u harmonikus D-ben és nem konstans, akkor

(a) u-nak nem létezik lokális maximuma és minimuma.

(b1) Ha $z_1, z_2, \ldots \in D$, $\lim z_n = w$, és $u(z_n) \to \sup u$ vagy $u(z_n) \to \inf u$, akkor w a D határán van.

(b2) Ha D korlátos, és u folytonos a D lezártján, akkor u a maximumát és a minimumát csak a határon veszi fel.

Bizonyítás. Legyen lokálisan $u = \operatorname{Re} f$; alkalmazzuk a holomorf maximum-elvet az e^f és az e^{-f} függvényekre:

$$|e^f| = e^u, \qquad |e^{-f}| = e^{-u}.$$

Cauchy-formula?

Mi lehet a Cauchy-formula megfelelője harmonikus függvényekre?

Tegyük fel, hogy u harmonikus a zárt egységkörön, $a \in \mathbb{D}$ rögzített.

Középérték-tulajdonság az $U(\zeta) = u\left(\dfrac{\zeta + a}{1 + \overline{a}\zeta}\right)$ függvényre:

$$u(a) = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} U(\zeta)\,|\mathrm{d}\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} u\Bigg(\underbrace{\frac{\zeta + a}{1 + \overline{a}\zeta}}_{w}\Bigg)\,|\mathrm{d}\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} u(w)\left|d\frac{w-a}{1-\overline{a}w}\right|.$$

$$d\frac{w-a}{1-\overline{a}w} = \left(\frac{w-a}{1-\overline{a}w}\right)'\mathrm{d}w = \frac{1(1-\overline{a}w) - (w-a)(-\overline{a})}{(1-\overline{a}w)^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}w)^2}\,\mathrm{d}w$$

Tehát

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} u(w)\cdot\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2}\,|\mathrm{d}w| = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} u(w)\cdot\frac{1-|a|^2}{|w-a|^2}\,|\mathrm{d}w|.$$

($|1-\overline{a}w| = |\overline{w}w - \overline{a}w| = |\overline{w} - \overline{a}| = |w-a|$)

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} u(w)\cdot\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2}\,|\mathrm{d}w| = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} u(w)\cdot\frac{1-|a|^2}{|w-a|^2}\,|\mathrm{d}w|.$$

Legyen $a = re^{i\varphi}$, $w = e^{it}$. A $\dfrac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2}$ tört két fontos alakja:

$$\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2} = \frac{1-|a|^2}{|w-a|^2} = \frac{\operatorname{Re}\big((w+a)(\overline{w}-\overline{a})\big)}{(w-a)(\overline{w}-\overline{a})} = \operatorname{Re}\frac{(w+a)(\overline{w}-\overline{a})}{(w-a)(\overline{w}-\overline{a})} = \operatorname{Re}\frac{w+a}{w-a}$$

és

$$\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}w|^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}w)(1-a\overline{w})} = \frac{1-|a|^2}{1-(\overline{a}w + a\overline{w}) + |a|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi - t) + r^2}.$$

Ezeket beírva:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\left(\operatorname{Re}\frac{e^{it}+a}{e^{it}-a}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-t)+r^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tétel (Poisson-formula)

Ha u harmonikus a zárt egységkörön, akkor minden $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}$-re

$$u(z) = u(re^{i\varphi}) = \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot P(r, \varphi - t)\, \mathrm{d}t$$

ahol

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi(1 - 2r\cos\theta + r^2)},$$

ennek a neve Poisson-magfüggvény vagy Poisson-kernel.

A Poisson-magfüggvény tulajdonságai

$P(r, t)$ folytonos, pozitív, és $\int_{t=0}^{2\pi} P(r, t)\, \mathrm{d}t = 1$.

Bizonyítás. Poisson-formula a konstans 1 függvényre.

A kör minden belső pontjában u értéke a határon felvett értékek súlyozott átlaga; a Poisson-mag értékei a súlyok.

Érdekesség

A Poisson-kernel másik alakjából

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot \left(\operatorname{Re} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) \mathrm{d}t = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, \mathrm{d}t \right).$$

Az $f(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, \mathrm{d}t$ paraméteres integrál holomorf; ennek a holomorf függvénynek a valós része az u.

A valós rész helyett vehetjük a képzetes részt is, így felírhatjuk az u-hoz tartozó egyik v függvényt is (az u harmonikus konjugáltját); lehet parciális deriváltakat venni stb.

Mese: Cauchy- vs. Poisson-formula

Ha f holomorf a zárt egységkörön, akkor $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ is harmonikus, ezért a kör belsejében

$$f(z) = \int_{t=0}^{2\pi} f(e^{it}) \cdot P(r, \varphi - t)\, \mathrm{d}t.$$

A Cauchy-formulát is felírhatnánk ilyen alakban. Mivel a körvonalon $\mathrm{d}w = iw\,|\mathrm{d}w|$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w = \int_{|w|=1} f(w) \cdot \frac{w}{2\pi(w - z)} |dw| = \int_{|w|=1} f(w) \cdot C(z, w) |dw|.$$

A $C(z, w) = \dfrac{w}{2\pi(w - z)}$ magfüggvény integrálja is 1, de a függvény nem is valós.

A Poisson-formulát a Cauchy-formulából is le lehetett volna vezetni:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} f(w) \left(\frac{1}{w - z} + \underbrace{\frac{\overline{z}}{1}}_{w\overline{w}} - \overline{z}w \right) \underbrace{iw\,|\mathrm{d}w|}_{\mathrm{d}w} = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} f(w) \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}\, |\mathrm{d}w|.$$

A Poisson- és a Cauchy-formula között a különbség: egy holomorf függvény.

22. Dirichlet-feladat

A Dirichlet-feladat. A Dirichlet-feladat megoldása az egységkörlemezen. A harmonikus függvények jellemzése a középértéktulajdonsággal.

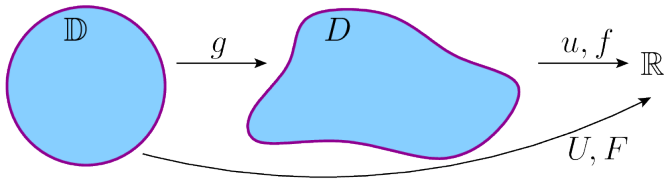
Dirichlet-feladat

Adott egy D Jordan-tartomány, továbbá egy folytonos $u : \partial D \to \mathbb{R}$ függvény. Terjesszük ki u-t olyan $\overline{D} \to \mathbb{R}$ függvénnyé, amely folytonos, és a tartomány belsejében harmonikus.

Tétel

A Dirichlet-feladatnak egyetlen, egyértelmű megoldása van.

Először visszavezetjük arra az esetre, ha D az egységkör.



Legyen $g : \mathbb{D} \to D$ konform megfeleltetés; a Caratheodory-tétel szerint ez folytonosan kiterjed a határra.

Az egységkörvonalon legyen $U(z) = u(g(z))$. Bármely $u : D \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor megoldása a Dirichlet-feladatnak, ha az $u \circ g$ függvény megoldása a Dirichlet-feladatnak az egységkörön az U függvénnyel:

u harmonikus D-n $\Leftrightarrow$ $u = \operatorname{Re} f$ egy $f \in \mathcal{O}(D)$ függvénnyel $\Leftrightarrow$ $U = \operatorname{Re}(f \circ g)$ egy $f \in \mathcal{O}(D)$ függvénnyel $\Leftrightarrow$ $U = \operatorname{Re} F$ egy $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ függvénnyel $\Leftrightarrow$ U harmonikus $\mathbb{D}$-n

Tétel (a Dirichlet-feladat megoldása az egységkörlapon)

Legyen $u : \{|z| = 1\} \to \mathbb{R}$ folytonos. Az u egyetlen folytonos kiterjesztése a zárt körlapra, amely a kör belsejében harmonikus:

$$U(re^{i\varphi}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot P(r, t-\varphi)\,\mathrm{d}t & \text{ha } r < 1; \\ u(e^{it}) & \text{ha } r = 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ezeket kell ellenőriznünk:

(1) U harmonikus a kör belsejében;

(2) U folytonos a határon;

(3) Ha U_1 is megoldása a feladatnak, akkor $U = U_1$.

1. állítás: $U(z)$ harmonikus a kör belsejében.

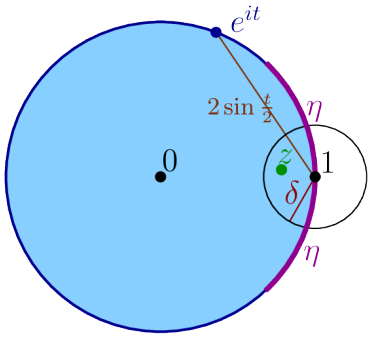
Ahogy már láttuk, $z = e^{i\varphi}$ esetén

$$U(z) = \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot P(r, t-\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot \left(\operatorname{Re} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \right) \mathrm{d}t = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{d}t \right).$$

Az $F(z) = \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it}) \cdot \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\mathrm{d}t \right)$ holomorf, és $U = \operatorname{Re} F$.

2. állítás: $U(z)$ folytonos a határon.

Elég az 1-beli folytonosságot igazolni.



A feltétel szerint a határon U folytonos; azt kell igazolni, hogy

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} U(z) = u(1).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott; ehhez keresünk $\delta - t$.
Legyen $K = \max|u(e^{it})|$. Van egy olyan $0 < \eta < \pi$, hogy $|t| < \eta$ esetén $\big|u(e^{it}) - u(1)\big| < \varepsilon/2$.
A δ most még titok, de biztos, hogy $\delta \leqslant \frac{\eta}{4}$. Ha $z \in \mathbb{D} \cap B(1,\delta)$.

$$\begin{aligned}\big|U(z) - u(1)\big| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(e^{it})\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(1)\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\Big|u(e^{it})-u(1)\Big|\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Az integrált máshogy becsüljük a 0-hoz közel és távol.

$$\big|U(z) - u(1)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\Big|u(e^{it})-u(1)\Big|\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,\mathrm{d}t$$

Az 1-hez közel, vagyis ha $0 \leqslant t \leqslant \eta$ vagy $2\pi - \eta \leqslant t \leqslant 2\pi$, akkor $|u(e^{it}) - u(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\eta} + \int_{2\pi-\eta}^{2\pi}\right) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az 1-től távol, vagyis ha $\eta \leqslant t \leqslant 2\pi - \eta$, akkor $|u(e^{it}) - u(1)| \leqslant 2K$,

$$\begin{gathered}|z| > 1-\delta \quad \text{és} \quad 1-|z|^2 = \big(1+|z|\big)\big(1-|z|\big) < 2\delta,\\ \big|e^{it}-1\big| \geqslant \big|e^{i\eta}-1\big| = 2\sin\frac{\eta}{2} > 2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\eta}{2} > \frac{\eta}{2} \quad \text{és} \quad |z-1| < \delta \leqslant \frac{\eta}{4},\\ \big|e^{it}-z\big| \geqslant \big|e^{it}-1\big| - |z-1| > \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{4},\\ \int_{\eta}^{2\pi-\eta} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{2\pi-\eta} 2K\cdot\frac{2\delta}{(\eta/4)^2}\,\mathrm{d}t < \frac{64K\delta}{\eta^2}.\end{gathered}$$

Tehát, $|U(z) - u(1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{64K\delta}{\eta^2}$; ha $\delta \leqslant \frac{\eta^2\varepsilon}{128K}$, akkor ez kisebb, mint ε.
A választásunk: $\delta = \min\left(\frac{\eta}{4}, \frac{\eta^2\varepsilon}{128K}\right)$.

3. állítás: Ha U_1 is megoldása a feladatnak, akkor $U = U_1$.

Legyen $U_2 = U - U_1$. Ez is folytonos, és a kör belsejében harmonikus; a határon $U = U_1$.

A maximum-elv miatt U_2 a határon felveszi a minimumát és a maximumát is, tehát mindkettő 0.

Akkor viszont U_2 a konstans 0, vagyis $U = U_1$.

Tétel (a középérték-tulajdonság megfordítása)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$ folytonos. Tegyük fel, hogy minden $c \in D$-hez van olyan $r_0 > 0$, hogy bármely $0 < r < r_0$ esetén

$$u(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} u(c + re^{it})\, \mathrm{d}t.$$

Ekkor u harmonikus függvény.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ körlemez, amelyre $\overline{K} \subset D$; azt fogjuk igazolni, hogy u harmonikus $\mathcal{K}$ belsejében. Ha ez minden $\mathcal{K}$-ra igaz, akkor u a teljes D-n harmonikus.

Az u függvény folytonos a $\mathcal{K}$ határán; legyen U a Dirichlet-feladat megoldása a $\mathcal{K}$ körre, a határon az u függvénnyel. Ekkor U is folytonos, a $\mathcal{K}$ belsejében igaz rá a középérték-tulajdonság, és a körlemez határán $U = u$.

Vizsgáljuk az $U_1 = U - u$ függvényt. Erre is folytonos, igaz rá a középérték-tulajdonság, és a $\mathcal{K}$ határán $U_1 = 0$. Ebből fogjuk bebizonyítani, hogy U_1 az egész körlapon 0, mert akkor $u = U$, és akkor u harmonikus.

Állítás

Ha U_1 folytonos $\overline{\mathcal{K}}$-n, a körvonalon 0, és minden $c \in \mathcal{K}$-hoz van olyan $r_0 > 0$, hogy bármely $0 < r < r_0$ esetén $U_1(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} U_1(c + re^{it})\, \mathrm{d}t$, akkor $U_1 = 0$.

Bizonyítás. Legyen $M = \max U_1$; mivel a határon $U_1 = 0$, $M \geqslant 0$. A célunk igazolni: $M = 0$.

Legyen $H = \{z \in \mathcal{K} :\ U_1(z) = M\}$. Mivel U_1 folytonos, a H halmaz relatív zárt.

Megmutatjuk, hogy H nyílt is.

Bármely $c \in H$-hoz van olyan $r_0 > 0$, hogy $0 < r < r_0$ esetén

$$M = U_1(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} U_1(c + re^{it})\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} M\, \mathrm{d}t = M.$$

Ez csak úgy lehet, ha az egész $|z - c| = r$ körvonalon $U_1 = M$.

De ez minden $0 < r < r_0$ esetén igaz, tehát a teljes $B(c, r_0)$ körlapon $U_1 = M$, tehát $B(c, r_0) \subset H$.

Mindez bármelyik $c \in H$-ra elmondható, tehát H nyílt.

$H \subset \mathcal{K}$ egyszerre nemüres, relatív zárt és nyílt, tehát $H = \mathcal{K}$.

A $\mathcal{K}$ belsejében $U_1 = M$, a határon $U_1 = 0$; a folytonosság miatt ez csak úgy lehet, ha $M = 0$.

Ugyanígy, $\min U_1 = 0$, tehát U_1 konstans 0.

Kitekintés: Mese a jó magfüggvényekről

Egy 1 szerint periodikus $f(t)$ függvényt Fourier-sorba szeretnénk fejteni:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{n \cdot 2\pi i t} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{n \cdot 2\pi i t}.$$

Ha van ilyen sor, és egyenletesen vagy L_2-ben konvergens, akkor

$$a_n = \int_0^1 f(s) \cdot e^{-n \cdot 2\pi i s}\, \mathrm{d}s.$$

Vajon ha ezekkel az együtthatókkal írjuk fel a Fourier-sort, konvergálni fog pontonként az f-hez?

Az N-edik részletösszeg

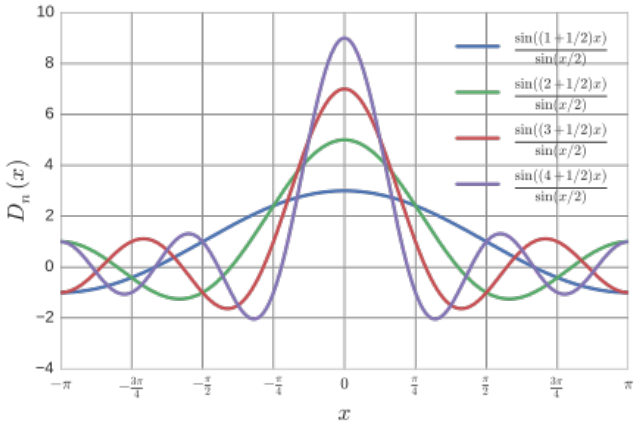
$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{n\cdot 2\pi i t} = \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_0^1 f(s)\cdot e^{-n\cdot 2\pi i s}\,\mathrm{d}t \right) e^{n\cdot 2\pi i t}$$

$$= \int_0^1 f(s) \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{n\cdot 2\pi i (t-s)} \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 f(s) D_N(t-s)\,\mathrm{d}t;$$

$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{n\cdot 2\pi i t} = \dfrac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin(\pi t)}$ az N-edik Dirichlet-magfüggvény.

$$s_N(t) = \int_0^1 f(s) \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{n\cdot 2\pi i (t-s)} \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 f(s) D_N(t-s)\,\mathrm{d}t$$

Ha $N \to \infty$, akkor a Dirichlet-magfüggvény nem viselkedik elég szépen, és nem igaz, hogy a Fourier-részletösszegek pontonként f-hez tartanának.



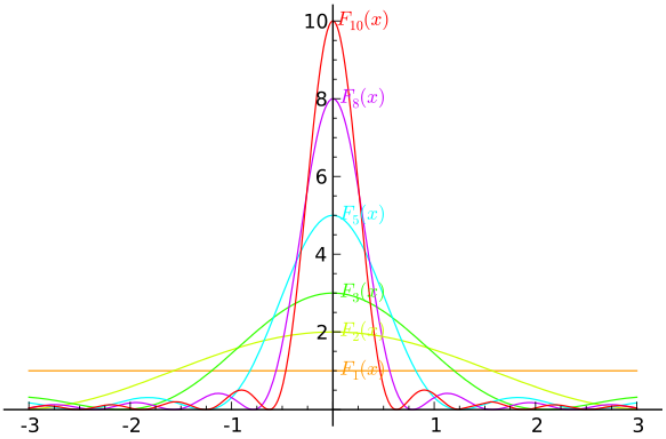
Fejér Lipót ötlete volt, hogy a részletösszegek Cesaro-átlagát vizsgálja:

$$\sigma_N(t) = \frac{s_0(t) + s_1(t) + \ldots + s_{N-1}(t)}{N}$$

$$= \int_0^1 f(s) \frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_{N-1}(t)}{N}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(s) F_N(t-s)\,\mathrm{d}t;$$

$F_N(t) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin(2N\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2$ az N-edik Fejér-magfüggvény.

A Fejér-magfüggvény nemnegatív, és ha $N \to \infty$, akkor a 0-ba koncentrálódik; a Fourier-részletösszegek átlaga pontonként tart f-hez.



A Poisson- és a Fejér- magfüggvények bizonyos értelemben "jó" magfüggvények...

Bővebben: → függvénysorok, Fourier-analízis

X1. Riemann-zeta függvény

Az Euler–Riemann féle ζ függvény

Definíció

$\operatorname{Re} s > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Hagyományosan $\operatorname{Re} s = \sigma$, $\operatorname{Im} s = t$ vagyis $s = \sigma + it$.

Tétel

A sor abszolút konvergens, az összegfüggvény holomorf.

Bizonyítás. Ha $\sigma_0 > 1$, akkor a $\sigma > \sigma_0$ félsíkban $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ közös konvergens majoráns.

Tétel

$\operatorname{Re} s > 1$ esetén

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

Tétel (Euler-szorzat)

$\operatorname{Re} s > 1$ esetén $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$.

Bizonyítás. A lényeg: ha $2^K \geqslant N$, akkor

$$\prod_{p \leqslant N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots + \frac{1}{p^{Ks}}\right) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{N^s} + \text{néhány további } \frac{1}{n^s} \text{ tag.}$$

$$\forall s \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \qquad \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \varepsilon$$

$$\forall s \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(s,\varepsilon) \quad \forall N \geqslant N_0 \quad \forall K \geqslant N \quad \left| \prod_{p \leqslant N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{Ks}}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{N^s}\right) \right| \leqslant \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \varepsilon$$

$$K \to \infty: \qquad \forall s \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(s,\varepsilon) \quad \forall N \geqslant N_0(s,\varepsilon) \quad \left| \prod_{p \leqslant N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} - \left(1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{N^s}\right) \right| \leqslant \varepsilon$$

$$N \to \infty: \qquad \forall s \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \left| \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} - \zeta(s) \right| \leqslant \varepsilon$$

$$\varepsilon \to 0: \qquad \forall s \quad \left| \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} - \zeta(s) \right| = 0.$$

Következmények

$\operatorname{Re} s > 1$ esetén

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}; \qquad \Rightarrow \qquad \zeta(s) \neq 0.$$

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot p^{ks}}$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ks}}.$$

Ezek a sorok mind lokálisan egyenletesen konvergensek.

Jelölés: von Mangoldt függvény

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{ha } n = p^k \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

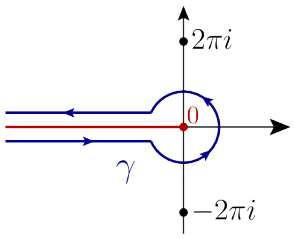
Ezzel a függvénnyel

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Kiterjesztés az egész síkra

A $\zeta(s)$ függvény kiterjeszthető az egész síkra, kivéve az $s = 1$ pontot, ahol elsőrendű pólusa van 1 reziduummal. Egy lehetséges kiterjesztés:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^{1-s}}{e^{-z} - 1}\, \mathrm{d}z \qquad (s \neq 1)$$



A függvényegyenlet

A ζ függvénynek van egy meglepő szimmetriája: az

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

függvényre igaz, hogy $\xi(1-s) = \xi(s)$ és $\xi\big(1-\overline{s}\big) = \overline{\xi(s)}$.

A $\Gamma(s/2)$-nek egyszeres pólusa van a negatív páros egész helyeken; tehát ott a $\zeta(s)$-nek egyszeres gyöke van; ezek a ζ függvény "triviális" gyökei.

A $\xi(s)$ értékei a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ egyenesen tisztán valósak. Ebből sejtette Riemann, hogy a nemtriviális gyökök mind ezen az egyenesen vannak.

Lemma

(a) Bármely pozitív egész N és $\sigma > 1$ esetén

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Speciálisan, $N = 1$ esetén

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{\mathrm{d}\big([x]-N\big)}{x^s} = \left[\frac{[x]-N}{x^s}\right]_N^{\infty} - \int_N^{\infty} \big([x]-N\big)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^s}\right)$$

$$= -\int_N^{\infty} \Big(x - \{x\} - N\Big)\cdot(-sx^{-s-1}\,\mathrm{d}x) = s\int_N^{\infty} x^{-s}\,\mathrm{d}x - s\int_N^{\infty} x^{-s-1}\cdot\{x\}\,\mathrm{d}x - Ns\int_N^{\infty} x^{-s-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{s}{s-1}N^{1-s} - N^{1-s} - s\int_N^{\infty} x^{-s-1}\cdot\{x\}\,\mathrm{d}x = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Tétel (kiterjesztés a jobb félsíkra)

A $\zeta(s)$ függvény holomorfan kiterjeszthető a jobb félsíkra az $s = 1$ pont kivételével, ahol elsőrendű pólusa van 1 reziduummal.

Bizonyítás. A Lemma szerint bármely N pozitív egész és $\sigma > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Tetszőleges $\sigma_0 > 0$ esetén, a $\sigma > \sigma_0$ félsíkban az integrált egyenletesen majorálja az $\displaystyle\int_N^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma_0+1}}$ integrál, tehát egy holomorf függvényt állít elő.

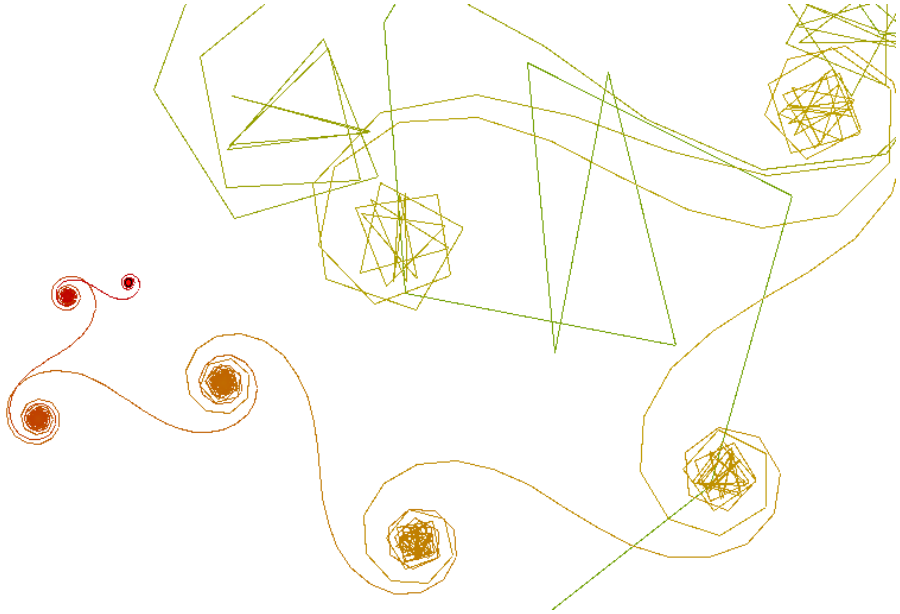
A jobboldalon álló képlet a jobb félsíkon holomorf, kivéve az $s = 1$ pontot, ahol a reziduum $N^0 = 1$.

(A kiterjesztés nem függ attól, hogy melyik N-et választjuk.)

Mese: A $\sum \frac{1}{n^s}$ sor viselkedése

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1}\cdot N^{1-\sigma}\cdot e^{it\log N} - s\int_N^{\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x \quad (\sigma > 0)$$

- Az utolsó integrál 0-hoz tart.
- Ha $\sigma > 1$, akkor az $N^{1-s} = N^{1-\sigma}\cdot e^{it\log N}$ sorozat egy spirál mentén halad befelé.
- Ha $\sigma = 1$, akkor az $N^{1-s} = e^{it\log N}$ sorozat egy kör kerületén halad körbe.
- Ha $\sigma < 1$, akkor az $N^{1-s} = N^{1-\sigma}\cdot e^{it\log N}$ sorozat egy spirál mentén halad kifelé.



Az $\frac{1}{n^s}$ és $\frac{1}{(n+1)^s}$ tagok közötti szög:

$$\arg \tfrac{1}{(n+1)^s} - \arg \tfrac{1}{n^s} = -t \log(n+1) + t \log n \approx -\frac{t}{n}.$$

Amíg $n \ll |t|$, a tagok iránya látszólag össze-vissza ugrál. Amikor n és t nagyságrendje hasonló, a részletösszegek szép sima görbe darabok mentén haladnak.

Lemma

A $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $|t| > 3$ halmazon

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n^s} + O(1).$$

Bizonyítás. Legyen $N = [t^2]$. A kiterjesztés szerint

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x.$$

$$\left|\zeta(s) - \sum_{n \leqslant t^2} \frac{1}{n^s}\right| \leqslant \left|\frac{N^{1-s}}{s-1}\right| + |s| \int_N^\infty \frac{\{x\}}{|x^{s+1}|} \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{N^{1-\sigma}}{|t|} + |s| \int_N^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma+1}} =$$

$$= \frac{N^{1-\sigma}}{|t|} + \frac{|s|}{\sigma N^\sigma} < \frac{|t|^{2(1-\sigma)}}{|t|} + \frac{\sigma + |t|}{\sigma\sqrt{t^2-1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = O(1).$$

Tétel

Tetszőleges $C > 0$-ra $|t| > 3$, $\sigma > \max\left(1 - \dfrac{C}{\log|t|}, 0\right)$ esetén

$$(a) \quad \zeta(s) = O(\log|t|); \qquad (b) \quad \zeta'(s) = O(\log^2|t|).$$

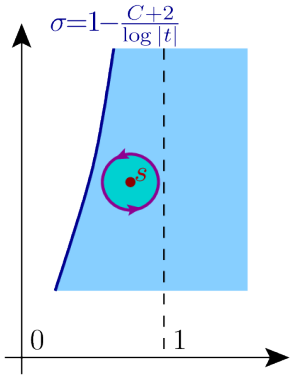
Bizonyítás. (a)

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} = e^{(1-\sigma)\log n} \cdot \frac{1}{n} < e^C \cdot \frac{1}{n}$$

$$\left|\zeta(s)\right| = \left|\sum_{n\leqslant t^2}\frac{1}{n^s} + O(1)\right| \leqslant e^C \sum_{n\leqslant t^2}\frac{1}{n} + O(1) = O(\log|t|).$$

(b) Elég $|t| > e^{C+2}$ esetén bizonyítani.

A $\sigma > 1 - \dfrac{C+2}{\log|t|}$ tartományon $|\zeta(s)| \leqslant O(\log|t|)$. Ez a tartomány tartalmazza a $\overline{B}\big(s, 1/\log|t|\big)$ körlemezt.



A deriváltra vonatkozó Cauchy-formulából

$$\left|\zeta'(s)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-s|=\frac{1}{\log|t|}} \frac{\zeta(w)}{(w-s)^2}\,\mathrm{d}w\right| < \max_{|w-s|=\frac{1}{\log|t|}} \frac{\left|\zeta(w)\right|}{|w-s|} \leqslant O\big(\log^2|t|\big).$$

Lemma $(3 < 4)$

$$3 + 4\cos x + \cos 2x \geqslant 0.$$

Bizonyítás.

$$3 + 4\cos x + \cos 2x = 3 + 4\cos x + \big(2\cos^2 x - 1\big) = 2(1-\cos x)^2 \geqslant 0.$$

Lemma

$\sigma > 1$ esetén

$$\left|\zeta(\sigma)\right|^3 \cdot \left|\zeta(\sigma+it)\right|^4 \cdot \left|\zeta(\sigma+2it)\right| \geqslant 1.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
&3\log\left|\zeta(\sigma)\right| + 4\log\left|\zeta(\sigma+it)\right| + \log\left|\zeta(\sigma+it)\right| \\
&= 3\,\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma) + 4\,\mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+it) + \mathrm{Re}\log\zeta(\sigma+it) \\
&= 3\,\mathrm{Re}\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot p^{k\sigma}} + 4\,\mathrm{Re}\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot p^{k(\sigma+it)}} + \mathrm{Re}\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot p^{k(\sigma+2it)}} \\
&= \sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot p^{k\sigma}}\Big(3 + 4\cos(kt\log p) + \cos(2kt\log p)\Big) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Tétel

$t \neq 0$ esetén

$$\zeta(1+it) \neq 0.$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\sigma > 1$ esetén

$$\left|\zeta(\sigma)\right|^3 \cdot \left|\zeta(\sigma+it)\right|^4 \cdot \left|\zeta(\sigma+2it)\right| \geqslant 1$$

avagy

$$(\sigma-1)\cdot\Big|(\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma)\Big|^3\cdot\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4\cdot\big|\zeta(\sigma+2it)\big|\geqslant 1.$$

↯ Indirekt tegyük fel, hogy $\zeta(1+it)=0$; akkor $\lim\limits_{\sigma\to1}\dfrac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}=\lim\limits_{\sigma\to1}\dfrac{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)}{\sigma-1}=\zeta'(1+it)$ véges szám.

A $\zeta(s)$-nek elsőrendű pólusa van $s=1$-ben 1 reziduummal, ezért $\lim\limits_{\sigma\to1+0}\big((\sigma-1)\zeta(\sigma)\big)=1$.

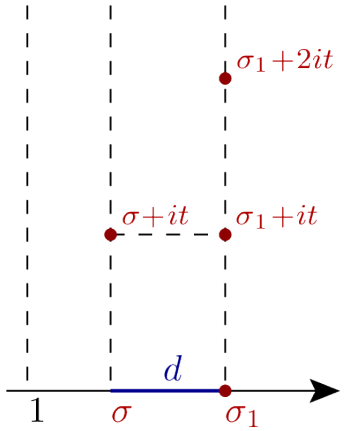
Tehát a $\sigma\to1+0$ határátmenetből

$$\begin{array}{ccccccc}(\sigma-1) & \cdot & \Big|(\sigma-1)\cdot\zeta(\sigma)\Big|^3 & \cdot & \left|\dfrac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 & \cdot & \big|\zeta(\sigma+2it)\big| \quad\geqslant\quad 1\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 1 & & \big|\zeta'(1+it)\big|^4 & & \big|\zeta(1+2it)\big| \quad\geqslant\quad 1 \quad ↯\end{array}$$

Tétel

Alkalmas $A,a>0$ konstansokkal, $\sigma\geqslant1$ és $|t|\geqslant3$ esetén $\big|\zeta(\sigma+it)\big|>\dfrac{A}{(\log|t|)^a}$.

Bizonyítás. Választani fogunk egy $\sigma_1=\sigma+d$ számot, $0<d<1$.



Láttuk, hogy

$$\big|\zeta(\sigma_1)\big|^3\cdot\big|\zeta(\sigma_1+it)\big|^4\cdot\big|\zeta(\sigma_1+2it)\big|\geqslant1.$$

Triviális, hogy $\zeta(\sigma_1)<1+\displaystyle\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma_1}}=1+\frac{1}{\sigma_1-1}\leqslant1+\frac{1}{d}<\frac{2}{d}$.

Tudjuk, hogy $\big|\zeta(\sigma_0+2it)\big|<C_1\log|t|$ és $\big|\zeta'(\sigma+it)\big|<C_2\big(\log|t|\big)^2\quad(C_1,C_2>0)$.

$$\big|\zeta(\sigma_1+it)\big|\geqslant\big|\zeta(\sigma_1)\big|^{-3/4}\big|\zeta(\sigma_1+2it)\big|^{-1/4}>\left(\frac{d}{2}\right)^{3/4}\big(C_1\log|t|\big)^{-1/4}=C_3\frac{d^{3/4}}{\big(\log|t|\big)^{1/4}}.$$

$$\big|\zeta(\sigma+it)\big|\geqslant\big|\zeta(\sigma_1+it)\big|-\int_\sigma^{\sigma_1}\big|\zeta'(x+it)\big|\,\mathrm{d}x>C_3\frac{d^{3/4}}{\big(\log|t|\big)^{1/4}}-C_2d\big(\log|t|\big)^2.$$

Feltételezhetjük, hogy $C_2\geqslant C_3$; egyébként C_2-t szabadon növelhetjük.

A d-t úgy választjuk, hogy a második tag fele legyen az elsőnek:

$$C_3\frac{d^{3/4}}{\big(\log|t|\big)^{1/4}}=2C_2d\big(\log|t|\big)^2;\qquad d=\frac{(C_3/2C_2)^4}{\big(\log|t|\big)^9}<1;\qquad\big|\zeta(\sigma+it)\big|>C_2d\big(\log|t|\big)^2=\frac{A}{\big(\log|t|\big)^7}.$$

Következmény

$\sigma \geqslant 1$, $|t| \geqslant 3$ esetén

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it)\right| < O\big(|\log t|^c\big).$$

Bizonyítás.

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it)\right| = \frac{1}{\big|\zeta(\sigma + it)\big|} \cdot \big|\zeta'(\sigma + it)\big| \leqslant O\Big(\big(\log|t|\big)^a\Big) \cdot O\Big(\big(\log|t|\big)^2\Big).$$

X2. Prímszámtétel

Jelölések, definíciók

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1; \qquad \operatorname{li} x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p = \log\left(\prod_{p \leqslant x} p\right) \quad \text{(Csebisev-féle } \vartheta\text{-függvény)}$$

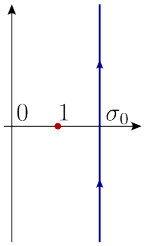
$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \log \operatorname{lkkt}\big(1, 2, \ldots, [x]\big) \quad \text{(Csebisev-féle } \psi\text{-függvény)}$$

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \quad \text{(Mertens-féle } M\text{-függvény)}$$

A prímszámtétel néhány ekvivalens formája

- $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}; \qquad \pi(x) \sim \operatorname{li} x$
- $\vartheta(x) \sim x; \qquad \psi(x) \sim x$
- $\dfrac{M(x)}{x} \to 0$

Együtthatóformula változatok



Ha $X > 0$, $\sigma_0 > 1$, akkor

- $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2Ti} \displaystyle\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} X^s \,\mathrm{d}s = \begin{cases} 1 & \text{ha } X = 1 \\ 0 & \text{ha } X \neq 1; \end{cases}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2Ti} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) X^s \,\mathrm{d}s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2Ti} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^s\right) \mathrm{d}s \overset{\text{😊}}{=}$$

$$\overset{\text{😊}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2Ti} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \left(\frac{X}{n}\right)^s \mathrm{d}s\right) = \Lambda(X) \quad \text{😇}$$

- $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\operatorname{Re} s = \sigma_0} \frac{X^s}{s} \,\mathrm{d}s = \begin{cases} 1 & \text{ha } X > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } X = 1 \\ 0 & \text{ha } 0 < X < 1; \end{cases}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma_0} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{X^s}{s} \,\mathrm{d}s = \sum_{n \leqslant X} \Lambda(n) = \psi(X)$$

Előnye: pontosan $\psi(X)$-et állítja elő. Hátránya: feltételesen konvergens improprius integrált és szummát kell felcserélni

- $\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\frac{X^s}{s^2}\,\mathrm{d}s=\begin{cases}\log x & \text{ha } X\geqslant 1,\\ 0 & \text{ha } 0<X\leqslant 1;\end{cases}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{X^s}{s^2}\,\mathrm{d}s=\sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\log\frac{X}{n}$$

Előnye: abszolút konvergens. Hátránya: Nem pontosan $\psi(X)$-et, hanem egyfajta átlagát adja meg.

Lemma

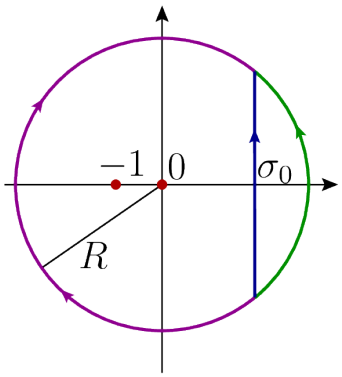
Ha $X>0$, $\sigma_0>0$, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=\begin{cases}1-\frac{1}{X} & \text{ha } X\geqslant 1,\\ 0 & \text{ha } 0<X\leqslant 1.\end{cases}$$

Bizonyítás. Egyenes szakasz helyett köríven integrálunk.

Ha $0<X\leqslant 1$, akkor a jobb köríven

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi i}\int_{)}\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=O(1/R).$$



Ha $X\geqslant 1$, akkor a bal köríven

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=\operatorname*{Res}_{s=0}\frac{X^s}{s(s+1)}+\operatorname*{Res}_{s=-1}\frac{X^s}{s(s+1)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(}\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=1-\frac{1}{x}+O(1/R).$$

Lemma

Ha $X>0$, $\sigma_0>1$, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=\sum_{n\leqslant X}\left(1-\frac{n}{X}\right)\Lambda(n).$$

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Lambda(n)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} s=\sigma_0}\frac{(X/n)^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\cdot\begin{cases}1-\frac{n}{X} & \text{ha } \frac{X}{n}\geqslant 1,\\ 0 & \text{ha } 0<\frac{X}{n}\leqslant 1\end{cases}$$

$$=\sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\left(1-\frac{n}{X}\right).$$

Megjegyzés

Legyen $\psi_1(X) = \sum_{n\leqslant X} \Lambda(n)\cdot\Big(1-\frac{n}{X}\Big)$. Ez a függvény éppen a $\psi(X)$ függvény Cesaro-átlaga:

$$\frac{1}{X}\int_0^X \psi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{X}\int_0^X \Big(\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\frac{1}{X}\int_n^X \psi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\frac{X-n}{X}.$$

Prímszámtétel (Georg Friedrich Bernhard Riemann, Jacques Salomon Hadamard, Charles-Jean de la Vallée Poussin)

$$\lim_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X} = 1.$$

Bizonyítás. Továbbra is legyen

$$\psi_1(X) = \sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\cdot\Big(1-\frac{n}{X}\Big) = \frac{1}{X}\int_0^X \psi;$$

először azt a gyengébb állítást igazoljuk, hogy

$$\lim_{X\to\infty}\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2}.$$

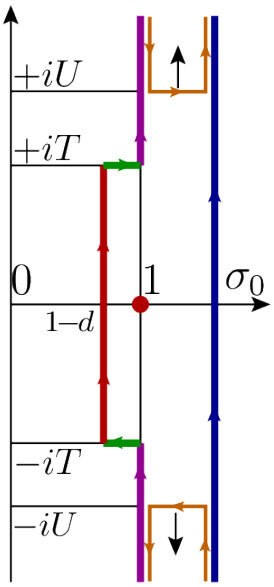
Azt már láttuk, hogy ha $X>0$, $\sigma_0>1$, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,s=\sigma_0}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{X^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s = \sum_{n\leqslant X}\Big(1-\frac{n}{X}\Big)\Lambda(n) = \psi_1(X);$$

X-szel elosztva,

$$\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,s=\sigma_0}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{X^{s-1}}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s.$$

Vegyünk egy $T>3$ számot, és ehhez egy $d=d(T)$-t úgy, hogy a $|t|\leqslant T$, $\sigma\geqslant 1-d$ halmazon $\zeta\neq 0$. Ezen kívül legyen $U>T$ és $X>1$ szintén tetszőleges.



Rögzített T,d,X esetén a kék, lila és barna szakaszokon X^s korlátos, $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O\big((\log|t|)^a\big)$, az integrandus nagyságrendje legfeljebb $O(\frac{(\log|t|)^a}{t^2})$. Emiatt az integrálok léteznek, sőt, ha $U\to\infty$, akkor

barna görbéken vett integrálok 0-hoz tartanak (miközben konstansok), tehát a barna vonalakon az integrál 0.

A reziduumtétel miatt

$$\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{kék}} \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{X^{s-1}}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s$$

$$= \operatorname*{Res}_{s=1}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{X^{s-1}}{s(s+1)} + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\text{barna}} + \int_{\text{lila}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{bordó}}\Big).$$

Az $\zeta(s)$-nek elsőrendű pólusa van az $s=1$-ben, ezért $\operatorname*{Res}_{s=1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -1$, és

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{X^{s-1}}{s(s+1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\text{barna}} + \int_{\text{lila}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{bordó}} \Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)\frac{X^{s-1}}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s\Big).$$

A lila szakaszokon $|\int_{\text{lila}}| < c\int_T^\infty \frac{(\log t)^a}{t^2}\,\mathrm{d}t = O\big(\frac{(\log T)^a}{T}\big)$.
A zöld szakaszokon $|X^{s-1}| < 1$, $|\int_{\text{zöld}}| < O_T(d)$ (az ordó-konstans függ T-től).
A bordó szakaszon $|\int_{\text{bordó}}| < O_{T,d}(X^{-d})$ (az ordó-konstans függ T-től és d-től is).

$$\Big|\frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{1}{2}\Big| \leqslant \Big|\int_{\text{lila}}\Big| + \Big|\int_{\text{zöld}}\Big| + \Big|\int_{\text{bordó}}\Big| \leqslant O\Big(\frac{(\log T)^a}{T}\Big) + O_T(d) + O_{T,d}(X^{-d}).$$

Rögzítjük T, d-t és $X \to \infty$:

$$\limsup_{X\to\infty}\Big|\frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{1}{2}\Big| \leqslant O\Big(\frac{(\log T)^a}{T}\Big) + O_T(d).$$

Most $d \to 0$:

$$\limsup_{X\to\infty}\Big|\frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{1}{2}\Big| \leqslant O\Big(\frac{(\log T)^a}{T}\Big)$$

Végül $T \to \infty$:

$$\limsup_{X\to\infty}\Big|\frac{\psi_1(X)}{X} - \frac{1}{2}\Big| \leqslant 0,$$

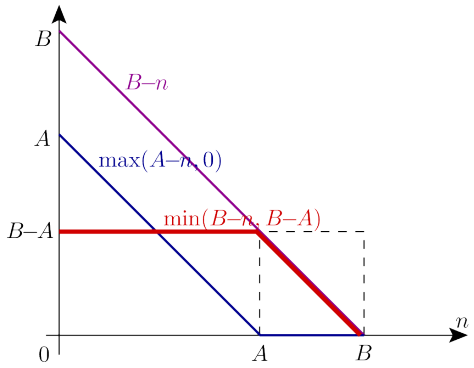
vagyis

$$\lim_{X\to\infty}\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2}.$$

Most már tudjuk, hogy $\lim_{X\to\infty}\frac{\psi_1(X)}{X} = \frac{1}{2}$.

$0 < A < B$-re vizsgáljuk $A\cdot\psi_1(A)$ és $B\cdot\psi_1(B)$ különbségét:

$$B\cdot\psi_1(B) - A\cdot\psi_1(A) = \sum_{n\leqslant B}(B-n)\Lambda(n) - \sum_{n\leqslant A}(A-n)\Lambda(n) = \sum_{n\leqslant A}(B-A)\Lambda(n) + \sum_{A<n\leqslant B}(B-n)\Lambda(n).$$



A $\Lambda(n)$ együtthatója az első összegben $B-A$; a második összegben $(B-A)$-ről indulva lineárisan lecseng 0-ig. A $\Lambda(n)$ közben nemnegatív. Ezért,

$$\sum_{n\leqslant A}(B-A)\Lambda(n)\leqslant B\cdot\psi_1(B)-A\cdot\psi_1(A)\leqslant\sum_{n\leqslant B}(B-A)\Lambda(n)$$

$$(B-A)\psi(A)\leqslant B\cdot\psi_1(B)-A\cdot\psi_1(A)\leqslant(B-A)\psi(B).$$

$$(B-A)\psi(A)\leqslant B\cdot\psi_1(B)-A\cdot\psi_1(A)\leqslant(B-A)\psi(B).$$

Legyen $0<\delta<1$, és írjuk fel az előbbi becslést az $((1-\delta)X,X)$ és az $(X,(1+\delta)X)$ párral is:

$$X\cdot\psi_1(X)-(1-\delta)X\cdot\psi_1\big((1-\delta)X\big)\leqslant\delta X\cdot\psi(X)\leqslant(1+\delta)X\cdot\psi_1\big((1+\delta)X\big)-X\cdot\psi_1(X)$$

Osszunk δX^2-tel:

$$\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\psi_1(X)}{X}-\frac{(1-\delta)^2}{\delta}\cdot\frac{\psi\big((1-\delta)X\big)}{(1-\delta)X}\leqslant\frac{\psi(X)}{X}\leqslant\frac{(1+\delta)^2}{\delta}\cdot\frac{\psi_1\big((1+\delta)X\big)}{(1+\delta)X}-\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\psi_1(X)}{X}$$

Most $X\to\infty$:

$$\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(1-\delta)^2}{\delta}\cdot\frac{1}{2}\leqslant\liminf_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X}\leqslant\limsup_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X}\leqslant\frac{(1+\delta)^2}{\delta}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{\delta}{2}\leqslant\liminf_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X}\leqslant\limsup_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X}\leqslant1+\frac{\delta}{2}.$$

Végül $\delta\to+0$:

$$1\leqslant\liminf_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X}\leqslant\limsup_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X}\leqslant1,$$

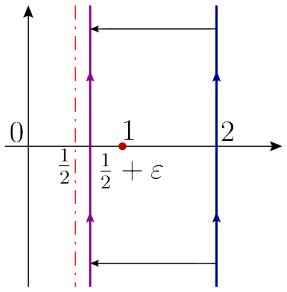
vagyis

$$\lim_{X\to\infty}\frac{\psi(X)}{X}=1.$$

KÉSZ.

Ha igaz a Riemann-sejtés ...?

... akkor a lila-zöld-bordó töröttvonal helyett a $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2} + \varepsilon$ egyenesen is integrálhatunk, ahol az integrál nagyságrendje $O(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.



A prímszámtétel néhány hibatagos alakja, ha a Riemann-sejtés igaz:

$$\psi(X) = X + O\big(\sqrt{X}\log^2 X\big);$$
$$\pi(X) = \operatorname{li} X + O\big(\sqrt{X}\log X\big).$$

És ha nem igaz a Riemann-sejtés ...?

Ahol $\zeta(s) = 0$, ott $\frac{\zeta'}{\zeta}$-nak pólusa van, és minden egyes ilyen pólus ad egy X-hatvány nagyságrendű plusz hibatagot.

Az összes reziduum öszegéből kapható az "explicit" formula:

$$\psi_0(X) = X - \sum_{\rho} \frac{X^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - X^{-2}).$$

Ha X nem egész, akkor $\psi_0(X) = \psi(X)$; ha X egész, akkor $\psi_0(X) = \sum_{n<X} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(X)$.

A szumma a $0 < \sigma < 1$ sávba eső, a képzetes rész szerint rendezett gyökökön fut végig.

Felismerhetjük, hogy

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\cdot\frac{X^s}{s}\right) = X$$

és ha ρ gyöke $\zeta(s)$-nek, akkor

$$\operatorname*{Res}_{s=\rho}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\cdot\frac{X^s}{s}\right) = -\frac{X^\rho}{\rho}.$$

A Riemann-sejtéstől függetlenül?

- de la Vallée Poussin, 1899:
  - $\zeta(s) \neq 0$, ha $\sigma > 1 - \dfrac{C}{\log|t|}$
  - $\psi(X) = X + O\Big(Xe^{-a\sqrt{\log X}}\Big)$
  - $\pi(X) = \operatorname{li} X + O\Big(Xe^{-b\sqrt{\log X}}\Big)$
- ... Hardy, Littlewood, Weyl, Vinogradov, ...
- Vinogradov, 1958:
  - $\zeta(s) \neq 0$, ha $\sigma > 1 - \dfrac{C}{(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}}$

– $\psi(X) = X + O\Big(Xe^{-a(\log X)^{3/5}(\log\log X)^{1/5}}\Big)$

– $\pi(X) = \operatorname{li} X + O\Big(Xe^{-b(\log X)^{3/5}(\log\log X)^{1/5}}\Big)$

Bővebben:

- E. Landau: Handbuch Der Lehre Von Der Verteilung Der Primzahlen
- K. Prachar: Primzahlverteilung
- I. M. Vinogradov – A. A. Karatsuba: The method of trigonometric sums in number theory
- Analitikus számelmélet kurzus

Tételjegyzék

1. Komplex differenciálhatóság

Komplex számok. Komplex sík. A komplex sík geometriai transzformációi. Határérték ∞-ben. Riemann-gömb. Komplex differenciálhatóság, geometriai jelentés. Cauchy–Riemann-egyenletek. Holomorf függvény. Egészfüggvény. Az inverzfüggvény differenciálási szabálya.

2. Hatványsorok

Hatványsor konvergenciája. Differenciálhatóság. Cauchy-Hadamard tétel. Taylor-együttható, egyértelműség. Analitikus függvények.

3. Elemi függvények

Exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények. A logaritmus és a hatványfüggvény értelmezésének problémái, többértékű függvény holomorf ága.

4. Komplex vonalintegrálok

Rektifikálható folytonos görbén vett folytonos függvény vonalintegrálja. Átírás Riemann-Stieltjes integrálokkal. Átírás Riemann-integrállá, ha a görbe folytonosan differenciálható. Átparaméterezés, additivitás, linearitás. Triviális felső becslés. Helyettesítéses integrálás. Newton-Leibniz formula.

5. Cauchy-alaptétel

A primitív függvény létezésének kapcsolata a vonalintegrál eltűnésével. Goursat-lemma és általánosítása. Cauchy-alaptétel konvex, és csillagszerű tartományra. Holomorf függvénynek minden konvex/csillagszerű tartományon van primitív függvénye. Homotóp görbéken a vonalintegrál megegyezik. Példa arra, hogy nem egyszerű tartományon a Cauchy-alaptétel nem igaz. A logaritmus létezése egyszeresen összefüggő tartományon.

6. Cauchy-integrálformulák

Cauchy-formula körvonalon, konvex és csillagszerű tartományon. A deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula. Ha egy függvény egy nyílt halmazon egyszer differenciálható, akkor akárhányszor differenciálható. Görbe pontra vonatkozó indexe. Az index tulajdonságai. Az általános Cauchy-formula görbeindexszel (csak kimondani). A logaritmus létezése egyszeresen összefüggő tartományon.

7. Függvénysorozatok és paraméteres integrálok

Holomorf függvények lok. egyenletes limesze holomorf. Ugyanez sorokkal és paraméteres integrálokkal. Ha lokálisan egyenletesen korlátos függvények sorozata egy sűrű halmazon pontonként konvergens, akkor lok. egyenletesen konvergens. Vitali-Montel tétel.

8. Hatványsorba fejtés

Együtthatóformula. Hatványsorba fejtés. Középérték-tulajdonság. Parseval-formula hatványsorokra. $\log(1+z)$ és $(1+z)^a$ hatványsora.

9. A hatványsorba fejtés következményei

Gyöktényezők kiemelése, gyök multiplicitása. Unicitástétel. Lokális aszimptotikus viselkedés. Maximumelv.

10. Egészfüggvények

Együtthatóbecslés. Liouville-tétel. Nem konstans egészfüggvény értékkészlete sűrű. Kis Picard-tétel (csak kimondani). A polinomok jellemzése nagyságrendekkel. Bizonyítás az algebra alaptételére.

11. Laurent-sorok

Laurent-sorok konvergenciája. Kapcsolat a Fourier-sorokkal. Együtthatóformula. Egyértelműség. Laurent-sorba fejtés. Rac.tört függvények Laurent-sorba fejtése. A $\operatorname{ctg} z$ függvény 0 körüli Laurent-sorának első három tagja. Parseval-formula.

12. Izolált szingularitások

Izolált szingularitások osztályozása. A megszüntethető szinularitások, pólusok és lényeges szingularitások jellemzése. Az $e^{1/z}$ viselkedése a 0 közelében. Casorati-Weierstrass tétel. Nagy Picard tétel (csak kimondani). Viselkedés a ∞-ben.

13. A reziduumtétel

Reziduum véges szingularitás körül. Reziduumtétel. Módszerek a reziduum kiszámítására. Reziduum ∞-ben.

14. A reziduumtétel alkalmazásai

A reziduumtétel alkalmazásai improprius integrálok és numerikus sorok összegének kiszámítására.

15. Argumentum-elv

Meromorf függvények. Logaritmikus derivált. Argumentumelv rektifikálható görbékkel határolt tartományra. Az argumentumelv kiterjesztései

16. A Rouché-tétel és alkalmazásai

Rouché-tétel. Az algebra alaptételének bizonyítása a Rouché-tételből. Lokális értékeloszlás. A nyílt leképezés tétele. Lokális inverz létezésének feltétele. Az inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága.

17. Törtlineáris függvények

Törtlineáris függvények. Reprezentáció mátrixszorzással. Három pont képe egyértelműen meghatározza a törlineáris függvényt. Komplex kettősviszony. Kettősviszonytartás, körtartás, szögtartás, szimmetriatartás.

18. Az egységkörlemez konform automorfizmusai

Konform megfeleltetések. Az egységkör 0-t fixen hagyó automorfizmusai a forgatások. A $\frac{z\pm a}{1\pm\overline{a}z}$ alakú törtlineáris függvények. Az egységkörlemez konform automorfizmusai. A körlemezek és félsíkok konform ekvivalensek, és közöttük minden konform megfeleltetés törtlineáris függvény. Az $\frac{z\pm a}{1\pm\overline{a}z}$ alakú törtek kiemelése az egségkörben holomorf függvényekből. Véges és végtelen Blaschke-szorzatok.

19. A konform leképezések alaptétele

Riemann-alaptétel. Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörlemezzel. Hurwitz-tétel. Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze. A Riemann-alaptétel bizonyítása.

20. A tükrözési elv

Caratheodory tétele (bizonyítás nélkül). Tükrözési elv. Tükrözés körvonalakra. Bizonyítás a kis Picard-tételre

21. Harmonikus függvények

Laplace-operátor, harmonikus függvények. Laplace-egyenlet. Egy függvény akkor és csak akkor harmonikus, ha lokálisan egy holomorf függvény valós része. Maximum- és minimum-elv. Poisson-formula.

22. Dirichlet-feladat

A Dirichlet-feladat. A Dirichlet-feladat megoldása az egységkörlemezen. A harmonikus függvények jellemzése a középértéktulajdonsággal.