Komplex Függvénytan, 13–14. előadás

A reziduumtétel
A reziduumtétel alkalmazásai

2020. nov. 2.

13. A reziduumtétel

Definíció (függvény reziduuma véges pontban)

Legyen $f(z)$ holomorf a c komplex szám egy pontozott környezetében, és itt a Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Az a_{-1} együtthatót az $f(z)$ függvény c pontbeli *reziduumának* nevezzük; jele

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) \quad \text{vagy} \quad \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Definíció (függvény reziduuma véges pontban)

Legyen $f(z)$ holomorf a c komplex szám egy pontozott környezetében, és itt a Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Az a_{-1} együtthatót az $f(z)$ függvény c pontbeli *reziduumának* nevezzük; jele

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) \quad \text{vagy} \quad \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Ekvivalens definíció

Ha $f(z)$ holomorf a $0 < |z-c| < r_0$ körben, akkor bármely $0 < r < r_o$ esetén

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Definíció (függvény reziduuma véges pontban)

Legyen $f(z)$ holomorf a c komplex szám egy pontozott környezetében, és itt a Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Az a_{-1} együtthatót az $f(z)$ függvény c pontbeli *reziduumának* nevezzük; jele

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) \quad \text{vagy} \quad \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Ekvivalens definíció

Ha $f(z)$ holomorf a $0 < |z-c| < r_0$ körben, akkor bármely $0 < r < r_o$ esetén

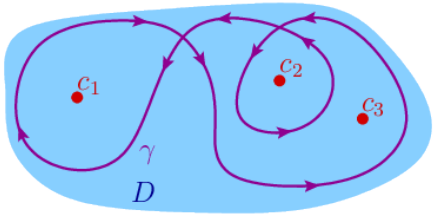
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Biz. Ez éppen az együttható-formula az a_{-1}-re.

Rezidumtétel (nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

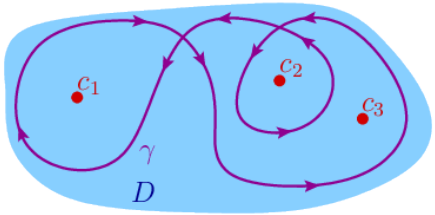
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c\in D} n(\gamma, c)\cdot \operatorname*{Res}_c f.$$



Rezidumtétel (nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c\in D} n(\gamma, c)\cdot \operatorname*{Res}_c f.$$

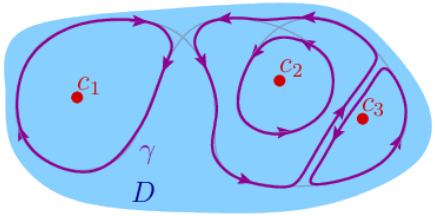


Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban,

Rezidumtétel (nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c\in D} n(\gamma, c)\cdot \operatorname*{Res}_c f.$$

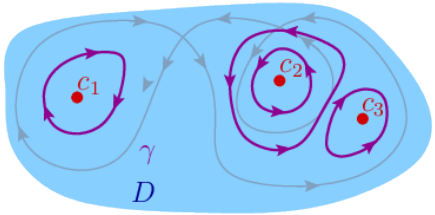


Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban,

Rezidumtétel (nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c\in D} n(\gamma, c)\cdot \operatorname*{Res}_c f.$$

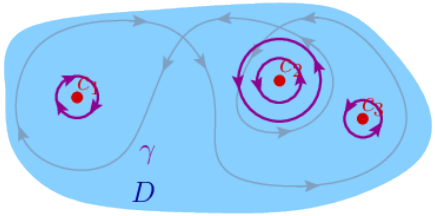


Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban, majd ezeket a darabokat egy-egy kis körre mozgatjuk,

Rezidumtétel (nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c\in D} n(\gamma, c)\cdot \operatorname*{Res}_c f.$$

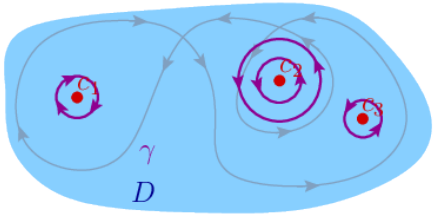


Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban, majd ezeket a darabokat egy-egy kis körre mozgatjuk,

Rezidumtétel (nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{c \in D} n(\gamma, c) \cdot \operatorname*{Res}_c f.$$

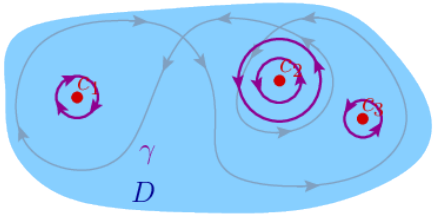


Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban, majd ezeket a darabokat egy-egy kis körre mozgatjuk, végül megszámoljuk a köröket a szingularitások körül.

Rezidumtétel (nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c\in D} n(\gamma, c)\cdot \operatorname*{Res}_c f.$$

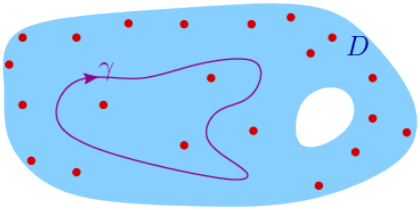


Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban, majd ezeket a darabokat egy-egy kis körre mozgatjuk, végül megszámoljuk a köröket a szingularitások körül.

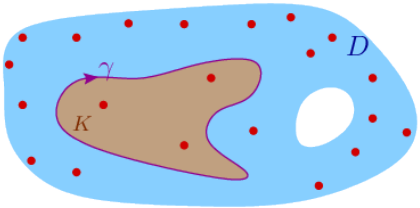
Persze a dolgok nem mindig olyan egyszerűek, ahogy elképzeljük...

A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.

A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.
A D-t egy szűkebb D_0 tartományra cseréljük, amelyben már csak véges sok szingularitás van.

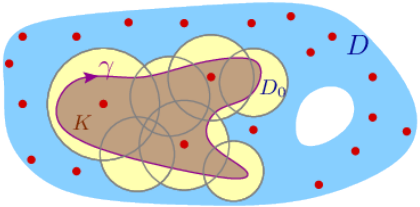


A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.
A D-t egy szűkebb D_0 tartományra cseréljük, amelyben már csak véges sok szingularitás van.



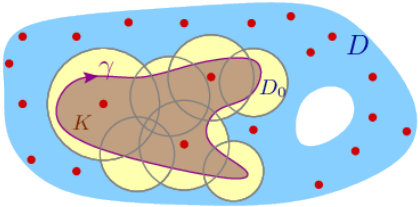
A γ nullhomotóp, tehát van egy folytonos $\Gamma(t,u) : [0,1]^2 \to D$ leképezés úgy, hogy minden $u \in [0,1]$ paraméter értékre $t \mapsto \Gamma(t,u)$ egy zárt görbe, $\gamma(t) = \Gamma(t,0)$ és $t \to \Gamma(t,1)$ konstans.
Legyen K a Γ képe, ami összefüggő és kompakt.

A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.
A D-t egy szűkebb D_0 tartományra cseréljük, amelyben már csak véges sok szingularitás van.



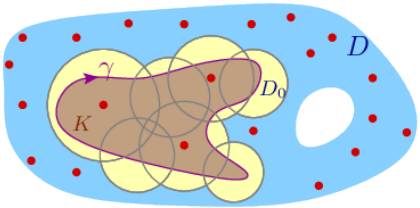
A γ nullhomotóp, tehát van egy folytonos $\Gamma(t,u) : [0,1]^2 \to D$ leképezés úgy, hogy minden $u \in [0,1]$ paraméter értékre $t \mapsto \Gamma(t,u)$ egy zárt görbe, $\gamma(t) = \Gamma(t,0)$ és $t \to \Gamma(t,1)$ konstans. Legyen K a Γ képe, ami összefüggő és kompakt.
A K minden c pontja körül vegyünk egy $B(c,r_c)$ nyílt körlemezt úgy, hogy a $\dot{B}(c,r_c)$ pontozott környezeten az $f(z)$ holomorf legyen. Ezek a nyílt körök lefedik K-t, tehát közülük véges sok, $B_1, B_2, \ldots, B_N$ is lefedi.

A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.
A D-t egy szűkebb D_0 tartományra cseréljük, amelyben már csak véges sok szingularitás van.



A γ nullhomotóp, tehát van egy folytonos $\Gamma(t,u) : [0,1]^2 \to D$ leképezés úgy, hogy minden $u \in [0,1]$ paraméter értékre $t \mapsto \Gamma(t,u)$ egy zárt görbe, $\gamma(t) = \Gamma(t,0)$ és $t \to \Gamma(t,1)$ konstans. Legyen K a Γ képe, ami összefüggő és kompakt.
A K minden c pontja körül vegyünk egy $B(c,r_c)$ nyílt körlemezt úgy, hogy a $\dot{B}(c,r_c)$ pontozott környezeten az $f(z)$ holomorf legyen. Ezek a nyílt körök lefedik K-t, tehát közülük véges sok, $B_1, B_2, \ldots, B_N$ is lefedi.
Legyen $D_0 = B_1 \cup \cdots \cup B_N$; ez egy összefüggő, nyílt halmaz, amely tartalmazza K-t; tehát a γ görbe D_0-ben is nullhomotóp.

A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.
A D-t egy szűkebb D_0 tartományra cseréljük, amelyben már csak véges sok szingularitás van.



A γ nullhomotóp, tehát van egy folytonos $\Gamma(t,u) : [0,1]^2 \to D$ leképezés úgy, hogy minden $u \in [0,1]$ paraméter értékre $t \mapsto \Gamma(t,u)$ egy zárt görbe, $\gamma(t) = \Gamma(t,0)$ és $t \to \Gamma(t,1)$ konstans.
Legyen K a Γ képe, ami összefüggő és kompakt.
A K minden c pontja körül vegyünk egy $B(c,r_c)$ nyílt körlemezt úgy, hogy a $\dot{B}(c,r_c)$ pontozott környezeten az $f(z)$ holomorf legyen. Ezek a nyílt körök lefedik K-t, tehát közülük véges sok, $B_1, B_2, \ldots, B_N$ is lefedi.
Legyen $D_0 = B_1 \cup \cdots \cup B_N$; ez egy összefüggő, nyílt halmaz, amely tartalmazza K-t; tehát a γ görbe D_0-ben is nullhomotóp.
Mivel mindegyik B_j-ben legfeljebb egy szingularitása lehet $f(z)$-nek, a D_0 tartományban már csak véges sok szingularitás van.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.
Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.
Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok negatív kitevős részét: legyen

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.
Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok negatív kitevős részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z - c_1)^n} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z - c_2)^n} \right) - \ldots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z - c_m)^n} \right).$$

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.
Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok negatív kitevős részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z - c_1)^n} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z - c_2)^n} \right) - \ldots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z - c_m)^n} \right).$$

A szingularitásokon kívül ez mind holomorf.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.
Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok negatív kitevős részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z - c_1)^n} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z - c_2)^n} \right) - \ldots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z - c_m)^n} \right).$$

A szingularitásokon kívül ez mind holomorf.

Bármely $1 \leq j \leq m$-re a c_j pontban az $f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}$ függvénynek megszüntethető szingularitása van,

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.
Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok negatív kitevős részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z - c_1)^n} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z - c_2)^n} \right) - \ldots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z - c_m)^n} \right).$$

A szingularitásokon kívül ez mind holomorf.

Bármely $1 \leq j \leq m$-re a c_j pontban az $f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}$ függvénynek megszüntethető szingularitása van, a többi kivont sor pedig holomorf c_j-ben.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.
Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok negatív kitevős részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z - c_1)^n} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z - c_2)^n} \right) - \ldots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z - c_m)^n} \right).$$

A szingularitásokon kívül ez mind holomorf.

Bármely $1 \leq j \leq m$-re a c_j pontban az $f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}$ függvénynek megszüntethető szingularitása van, a többi kivont sor pedig holomorf c_j-ben. Tehát, $g(z)$-nek mindegyik c_j-ben megszüntethető szingularitása van;

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \ldots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z - c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C} \setminus \{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.
Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok negatív kitevős részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z - c_1)^n} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z - c_2)^n} \right) - \ldots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z - c_m)^n} \right).$$

A szingularitásokon kívül ez mind holomorf.

Bármely $1 \leq j \leq m$-re a c_j pontban az $f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}$ függvénynek megszüntethető szingularitása van, a többi kivont sor pedig holomorf c_j-ben. Tehát, $g(z)$-nek mindegyik c_j-ben megszüntethető szingularitása van; $g(z)$ az egész D_0 tartományon holomorf.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z$$

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z$$

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = 0$.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = 0$.
$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye,

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = 0$.

$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = 0$.

$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.

Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$$

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = 0$.

$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.

Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c_j} \right)$$

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z = 0$.

$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.

Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \Big).$$

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.

Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \Big).$$

Ha $c \in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.

Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \Big).$$

Ha $c \in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.

Ha $c \notin D_0$, akkor $\frac{1}{z-c}$ holomorf D_0-on és γ nullhomotóp,

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.
Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \Big).$$

Ha $c \in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.
Ha $c \notin D_0$, akkor $\frac{1}{z-c}$ holomorf D_0-on és γ nullhomotóp, ezért $n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c} = 0$.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.
Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \Big).$$

Ha $c \in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.
Ha $c \notin D_0$, akkor $\frac{1}{z-c}$ holomorf D_0-on és γ nullhomotóp, ezért $n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c} = 0$.

Ezek után

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.
Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \right).$$

Ha $c \in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.
Ha $c \notin D_0$, akkor $\frac{1}{z-c}$ holomorf D_0-on és γ nullhomotóp, ezért $n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c} = 0$.

Ezek után

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma, c_j) \cdot \operatorname*{Res}_{c_j} f$$

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
$n \geq 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.
Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \Big).$$

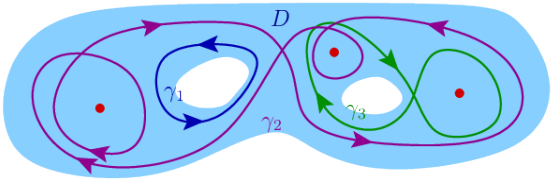
Ha $c \in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.
Ha $c \notin D_0$, akkor $\frac{1}{z-c}$ holomorf D_0-on és γ nullhomotóp, ezért $n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c} = 0$.

Ezek után

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma, c_j) \cdot \operatorname*{Res}_{c_j} f = \sum_{c \in D} n(\gamma, c) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f.$$

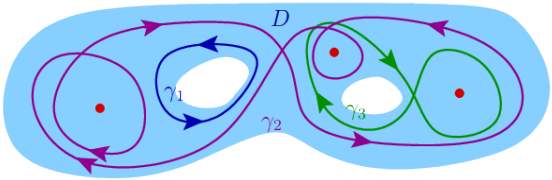
Rezidumtétel (nullhomológ változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_c f$.



Rezidumtétel (nullhomológ változat)

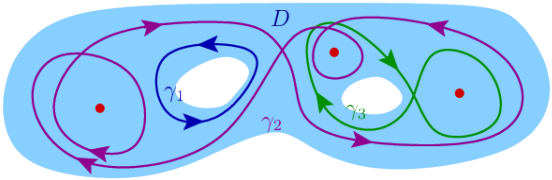
Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_c f$.



Biz. (vázlat) Legyen $D_1 \subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf.

Rezidumtétel (nullhomológ változat)

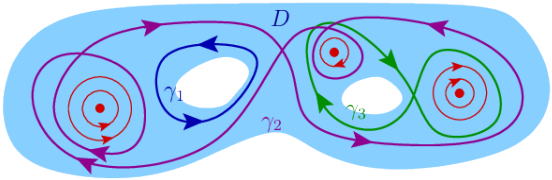
Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_c f$.



Biz. (vázlat) Legyen $D_1 \subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf. Az eddigi görbékhez továbbiakat veszünk hozzá: mindegyik c szingularitás körül rajzolunk $-\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c)$ darab kis kört.

Rezidumtétel (nullhomológ változat)

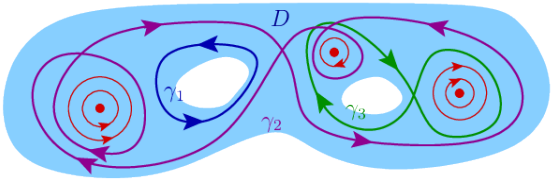
Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_c f$.



Biz. (vázlat) Legyen $D_1 \subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf. Az eddigi görbékhez továbbiakat veszünk hozzá: mindegyik c szingularitás körül rajzolunk $-\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c)$ darab kis kört.

Rezidumtétel (nullhomológ változat)

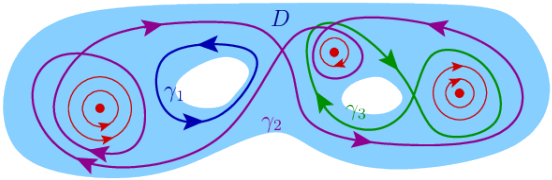
Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_c f$.



Biz. (vázlat) Legyen $D_1 \subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf. Az eddigi görbékhez továbbiakat veszünk hozzá: mindegyik c szingularitás körül rajzolunk $-\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c)$ darab kis kört. Az így kapott görbe lánc indexe minden D_1-en kívüli pontra nézve 0,

Rezidumtétel (nullhomológ változat)

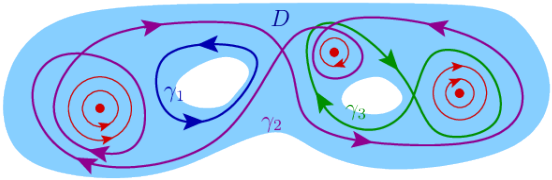
Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_c f$.



Biz. (vázlat) Legyen $D_1 \subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf. Az eddigi görbékhez továbbiakat veszünk hozzá: mindegyik c szingularitás körül rajzolunk $-\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c)$ darab kis kört. Az így kapott görbe lánc indexe minden D_1-en kívüli pontra nézve 0, tehát az általános Cauchy-tétel szerint ezeken a görbéken a vonalintegrálok összege 0.

Rezidumtétel (nullhomológ változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$. Ekkor $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_c f$.



Biz. (vázlat) Legyen $D_1 \subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf. Az eddigi görbékhez továbbiakat veszünk hozzá: mindegyik c szingularitás körül rajzolunk $-\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c)$ darab kis kört. Az így kapott görbe lánc indexe minden D_1-en kívüli pontra nézve 0, tehát az általános Cauchy-tétel szerint ezeken a görbéken a vonalintegrálok összege 0. Ezért,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk. . .

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c}$$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c);$$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}$$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z}$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots,$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.
- $\dfrac{1}{z^2 \sin z}$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)}$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z} \right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots,$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$.

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z}$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z} = \cos 0$.

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z}\right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z} = \cos 0$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3}$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z} \right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z} = \cos 0$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = \frac{(\cos z)''\big|_{z=0}}{2!}$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{24}z^{-2} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z} \right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3(1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots$, tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z} = \cos 0$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = \frac{(\cos z)''\big|_{z=0}}{2!} = -\frac{1}{2}$.

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1}$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big)$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c)$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)}$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to c} \frac{z-c}{f(z)}$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$
- Ha a c pontban $f(z)$ és $g(z)$ holomorf, $g(c) \neq 0$, és $h(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$
- Ha a c pontban $f(z)$ és $g(z)$ holomorf, $g(c) \neq 0$, és $h(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{g(z) \cdot h(z)}$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$
- Ha a c pontban $f(z)$ és $g(z)$ holomorf, $g(c) \neq 0$, és $h(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{g(z) \cdot h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{h(z)}$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$
- Ha a c pontban $f(z)$ és $g(z)$ holomorf, $g(c) \neq 0$, és $h(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{g(z) \cdot h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \frac{1}{h'(c)}$$

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$
- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z)\big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$
- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$
- Ha a c pontban $f(z)$ és $g(z)$ holomorf, $g(c) \neq 0$, és $h(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{g(z) \cdot h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \frac{1}{h'(c)} = \frac{f(c)}{g(c) \cdot h'(c)}.$$

Példák

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z}$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}}$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1}$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}}$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4-1}$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z^4-1)'\Big|_{z=i}}$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z^4-1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{-4i}.$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z^4-1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{-4i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{(z^3+2\sin z)\cdot\cos z}$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z^4-1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{-4i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{(z^3+2\sin z)\cdot\cos z} = \frac{e^0}{(z^3+2\sin z)'\big|_{z=0}\cdot\cos 0}\Bigg|_{z=0}$$

Példák

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{(\cos z)'\big|_{z=\pi}} = \frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z^4-1)'\Big|_{z=i}} = \frac{1}{-4i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{(z^3+2\sin z)\cdot\cos z} = \frac{e^0}{(z^3+2\sin z)'\big|_{z=0}\cdot\cos 0}\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{2}.$$

Definíció (reziduum a végtelenben)

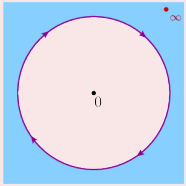
Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z$.

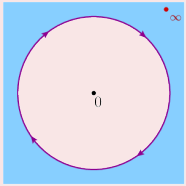


Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor
$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- $$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{Res}_{w=0} \left(-\frac{1}{w^2} \cdot f\left(\frac{1}{w}\right) \right).$$

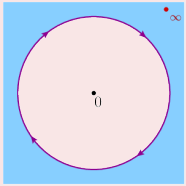


Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$



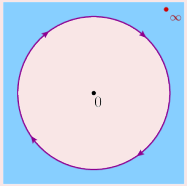
Biz. . (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$



Biz. . (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

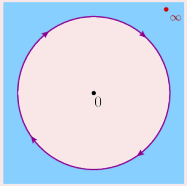
(b) Helyettesítéses integrálás: $z = \frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!),

Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$



Biz. . (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

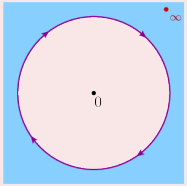
(b) Helyettesítéses integrálás: $z = \frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!), $\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$,

Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$



Biz. . (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

(b) Helyettesítéses integrálás: $z = \frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!), $\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$,

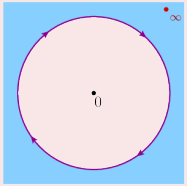
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$



Biz. . (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

(b) Helyettesítéses integrálás: $z = \frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!), $\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$,

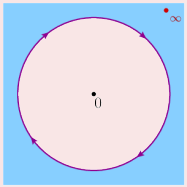
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$



Biz. . (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

(b) Helyettesítéses integrálás: $z = \frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!), $\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$,

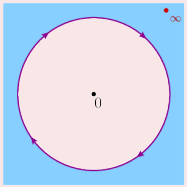
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{R}} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{-\,\mathrm{d}w}{w^2}$$

Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Ekvivalens definíciók

- Ha $f(z)$ az R sugarú körön és azon kívül holomorf, akkor
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$



Biz. . (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

(b) Helyettesítéses integrálás: $z = \frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!), $\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{R}} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{-\,\mathrm{d}w}{w^2} = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$

A reziduumok összege

Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

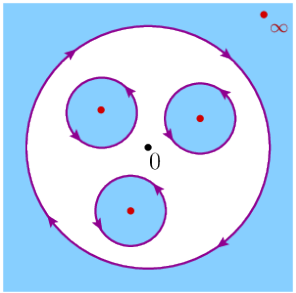
$$\sum_{c \in \overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

A reziduumok összege

Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c \in \overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

Biz. Ha a szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor



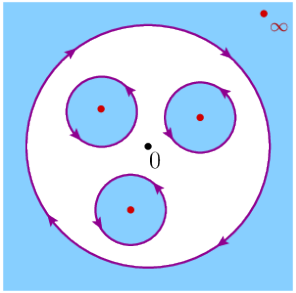
A reziduumok összege

Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

Biz. Ha a szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f$$



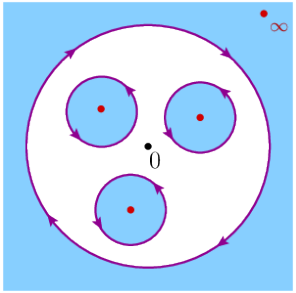
A reziduumok összege

Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

Biz. Ha a szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = \left(\sum_{|c|<R} \operatorname*{Res}_c f \right)$$



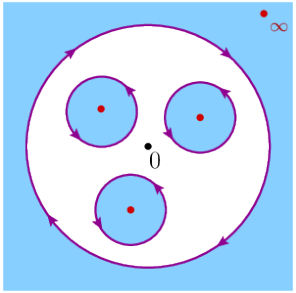
A reziduumok összege

Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

Biz. Ha a szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = \left(\sum_{|c|<R} \operatorname*{Res}_c f \right) + \operatorname*{Res}_\infty f$$



A reziduumok összege

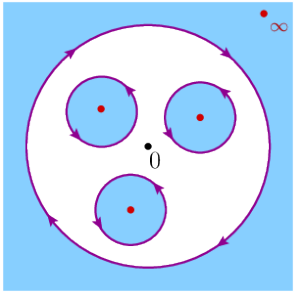
Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

Biz. Ha a szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = \left(\sum_{|c|<R} \operatorname*{Res}_c f\right) + \operatorname*{Res}_\infty f$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z$$



A reziduumok összege

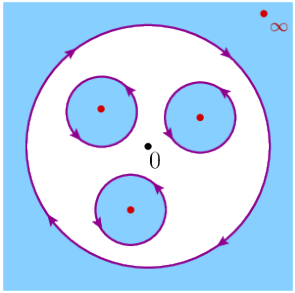
Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

Biz. Ha a szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = \left(\sum_{|c|<R} \operatorname*{Res}_c f\right) + \operatorname*{Res}_\infty f$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z$$



A reziduumok összege

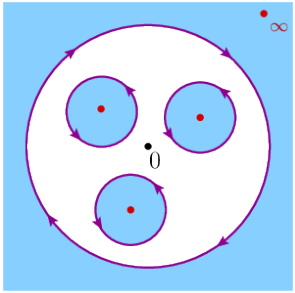
Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = 0.$$

Biz. Ha a szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_c f = \left(\sum_{|c|<R} \operatorname*{Res}_c f\right) + \operatorname*{Res}_\infty f$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



szünet

14. A reziduumtétel alkalmazásai

Improprius integrálok kiszámítása

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Példa (integráljunk félkörön)

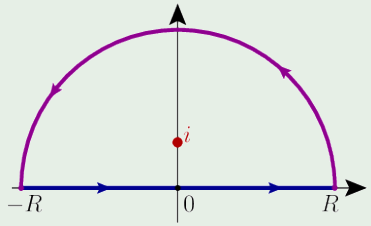
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Példa (integráljunk félkörön)

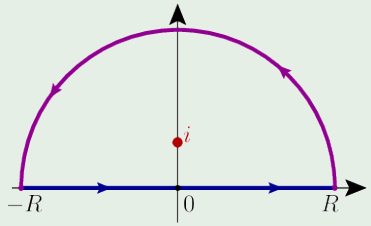
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

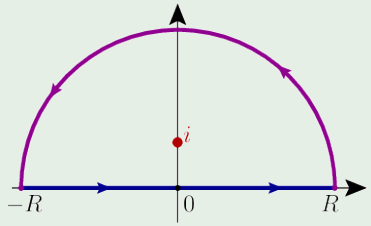
$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

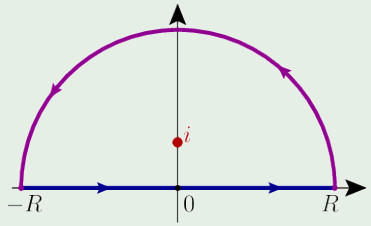
$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

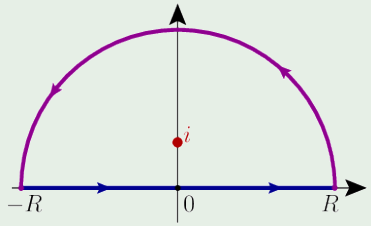


Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

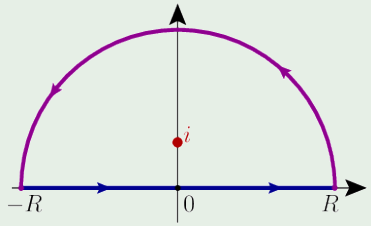
$$= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

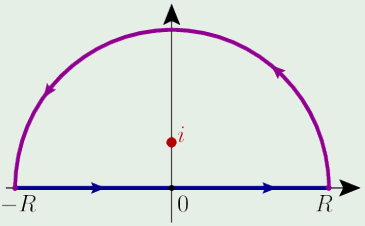
$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} + O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right)\end{aligned}$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

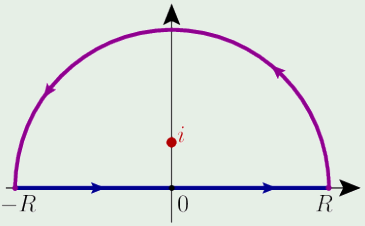
$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} + O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right) \\ &= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}\end{aligned}$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

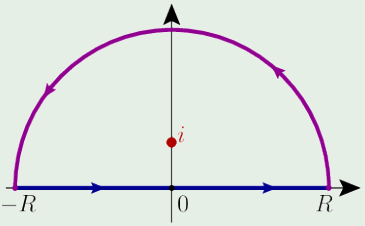
$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} + O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right) \\ &= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} + O\left(\frac{1}{R}\right)\end{aligned}$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

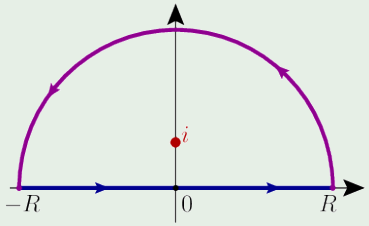
$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\smile} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} + O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right) \\
&= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} + O\left(\frac{1}{R}\right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} + O\left(\frac{1}{R}\right)
\end{aligned}$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

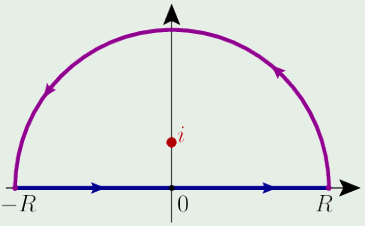
$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\smile} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} + O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right) \\
&= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} + O\left(\frac{1}{R}\right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} + O\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\pi}{e} + O\left(\frac{1}{R}\right).
\end{aligned}$$



Példa (integráljunk félkörön)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z - \int_{\frown} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} + O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right) \\ &= 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} + O\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\pi}{e} + O\left(\frac{1}{R}\right).\end{aligned}$$



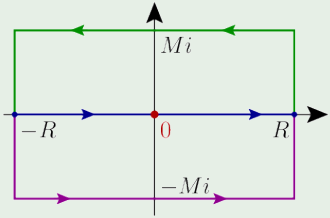
A $R\to\infty$ határátmenetből: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{2e}.$

Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

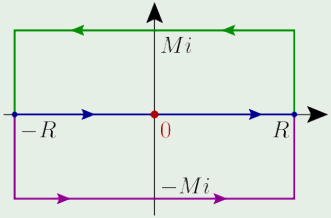
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$



Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

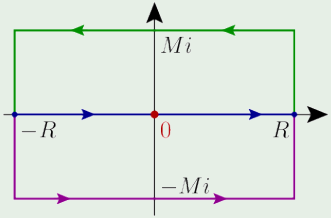
$$\int_0^{R} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$



Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

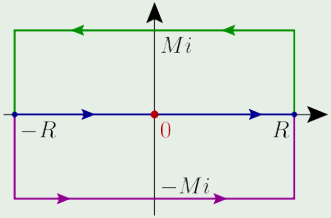
$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$



Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\hookrightarrow\llcorner} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

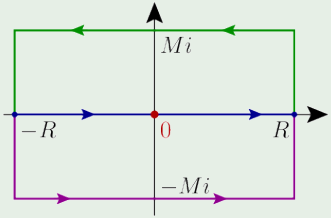


Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\hookrightarrow\llcorner} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\hookrightarrow\llcorner} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\,\mathrm{d}z$$

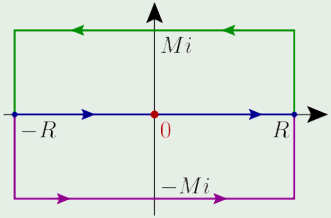


Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$

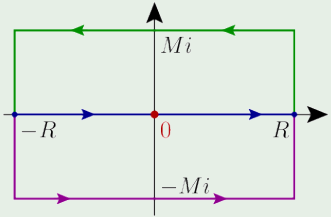


Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



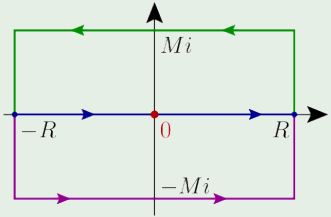
A felső félsíkban e^{iz}, az alsó félsíkban e^{-iz} korlátos.

Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\hookrightarrow\llcorner} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\hookrightarrow\llcorner} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\llcorner} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\llcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A felső félsíkban e^{iz}, az alsó félsíkban e^{-iz} korlátos.

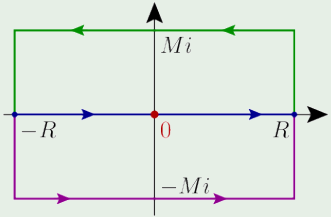
$$\ldots = \frac{1}{4i}\int_{\circlearrowleft} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\leftarrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\llcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z$$

Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\gamma} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A felső félsíkban e^{iz}, az alsó félsíkban e^{-iz} korlátos.

$$\ldots = \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z$$

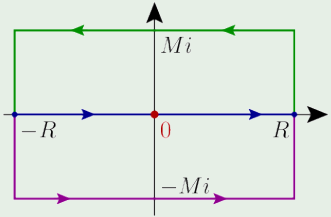
$$= \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} - \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z$$

Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\hookrightarrow\!\!\lrcorner} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\hookrightarrow\!\!\lrcorner} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\!\!\lrcorner} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



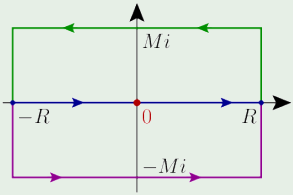
A felső félsíkban e^{iz}, az alsó félsíkban e^{-iz} korlátos.

$$\ldots = \frac{1}{4i}\int_{\overset{\hookleftarrow}{\hookrightarrow\!\!\lrcorner}} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\!\!\hookleftarrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z$$

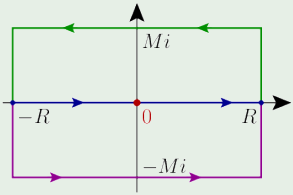
$$= \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\!\!\hookleftarrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\!\!\hookleftarrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\!\!\leftarrow\!\!\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\!\!\rightarrow\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$

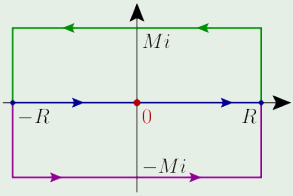


$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



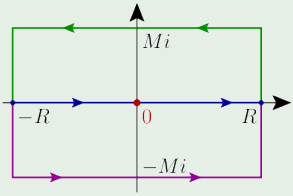
A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \leq 1$ és $|z| \geq R$, tehát

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\!\!\leftarrow\!\!\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\!\!\rightarrow\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \leq 1$ és $|z| \geq R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M$.

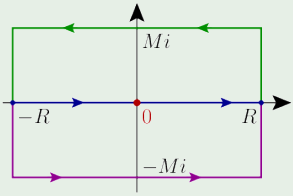
$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\!\!\leftarrow\!\!\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\!\!\rightarrow\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \leq 1$ és $|z| \geq R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M$.

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \leq e^{-M}$ és $|z| \geq M$, tehát

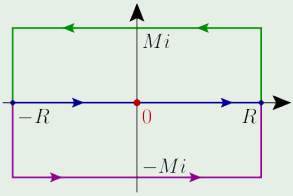
$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\curvearrowleft} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\curvearrowright} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\curvearrowleft} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\curvearrowright} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$

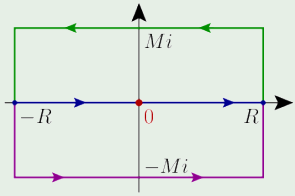


A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



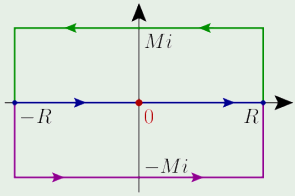
A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\!\!\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



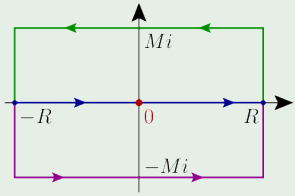
A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma\curvearrowleft} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\curvearrowright\Gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



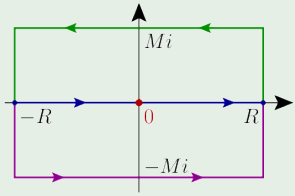
A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma\circlearrowleft} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma\circlearrowright} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



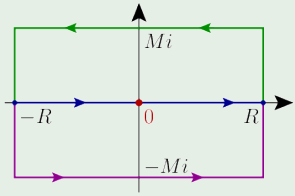
A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M$.

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R$.

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + O\left(e^{-\sqrt{R}}\sqrt{R}\right).$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \quad \frac{\pi}{2} \quad - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\!\!\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z \quad - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\!\!\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

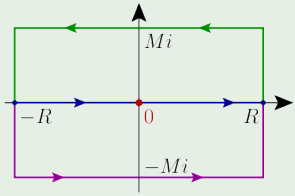
A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad = \frac{\pi}{2} \quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \quad + O\left(e^{-\sqrt{R}}\sqrt{R}\right).$$

Mindkét hibatag 0-hoz tart,

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

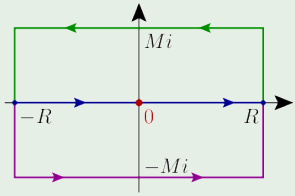
Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + O\left(e^{-\sqrt{R}}\sqrt{R}\right).$$

Mindkét hibatag 0-hoz tart, tehát

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M$.

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R$.

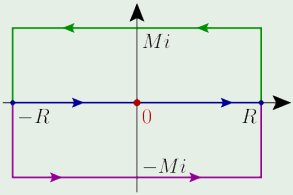
Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + O\left(e^{-\sqrt{R}}\sqrt{R}\right).$$

Mindkét hibatag 0-hoz tart, tehát

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \quad \frac{\pi}{2} \quad - \frac{1}{4i}\int_{\Gamma\hookleftarrow} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z \quad - \frac{1}{4i}\int_{\hookrightarrow\Gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$



A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \le 1$ és $|z| \ge R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M.$

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \le e^{-M}$ és $|z| \ge M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R.$

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad = \frac{\pi}{2} \quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \quad + O\left(e^{-\sqrt{R}}\sqrt{R}\right).$$

Mindkét hibatag 0-hoz tart, tehát

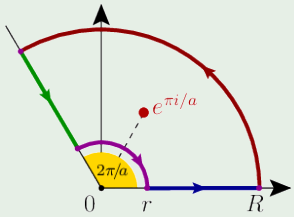
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

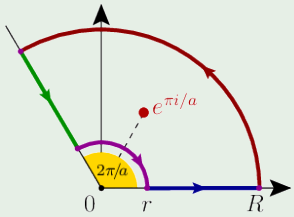
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$

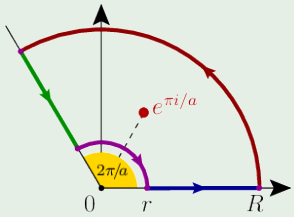
$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1}$$



Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$

$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

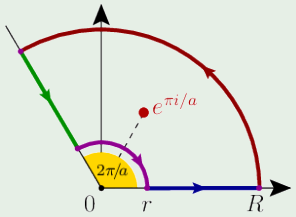


Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$

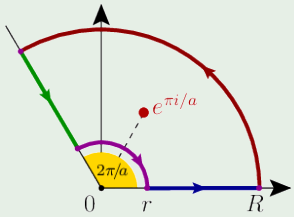
$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \left.\frac{1}{(z^a+1)'}\right|_{z=e^{\pi i/a}}$$



Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$

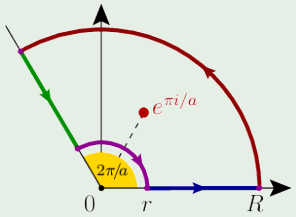


$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$

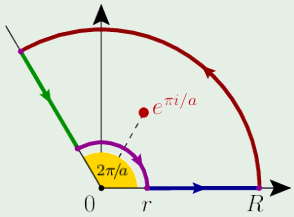


$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



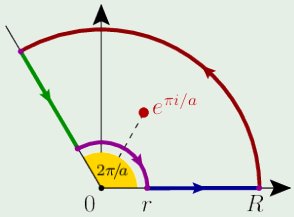
$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1},$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



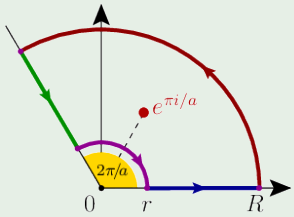
$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \qquad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



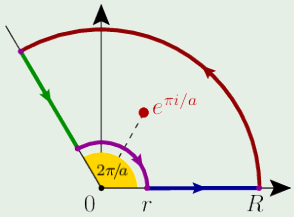
$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \qquad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \qquad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}),$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



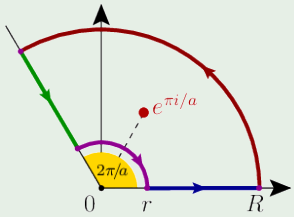
$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \qquad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \qquad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \qquad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

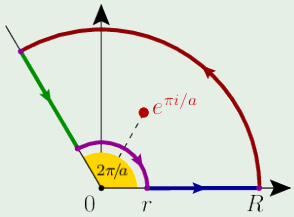
$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \qquad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \qquad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \qquad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

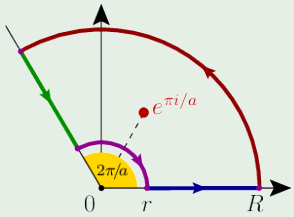
$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \qquad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \qquad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \qquad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

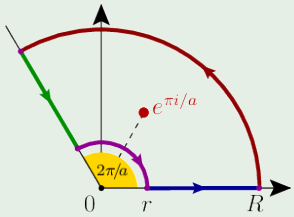
$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}})$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

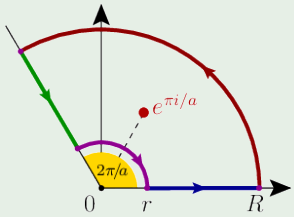
$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \qquad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \qquad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \qquad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

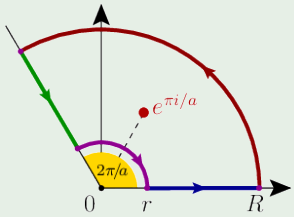
$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

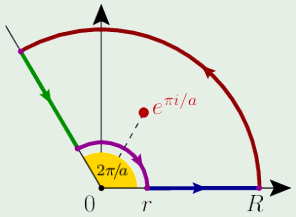
$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

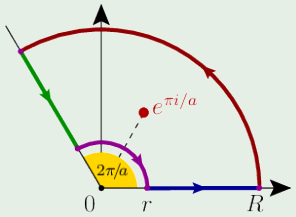
$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = 2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a\cdot(1-e^{2\pi i/a})}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

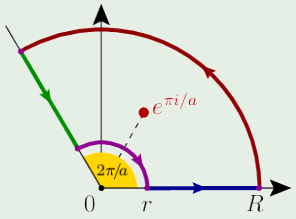
$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = 2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a\cdot(1-e^{2\pi i/a})} = \frac{\pi}{a}\cdot\frac{2i}{e^{\pi i/a}-e^{-\pi i/a}}$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

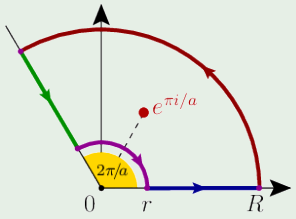
$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = 2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a\cdot(1-e^{2\pi i/a})} = \frac{\pi}{a}\cdot\frac{2i}{e^{\pi i/a}-e^{-\pi i/a}} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}.$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a>1)$$



$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \frac{1}{(z^a+1)'}\bigg|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\,\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

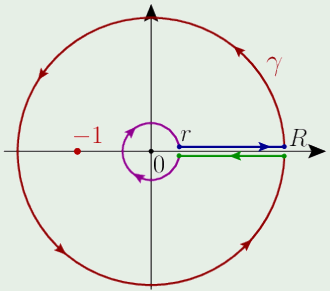
$$2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a}) \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = 2\pi i \cdot \frac{-e^{\pi i/a}}{a\cdot(1-e^{2\pi i/a})} = \frac{\pi}{a}\cdot\frac{2i}{e^{\pi i/a}-e^{-\pi i/a}} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}.$$

$a\to 1$-re, $a=2$-re és $a\to\infty$-re könnyen ellenőrizhetjük.

Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

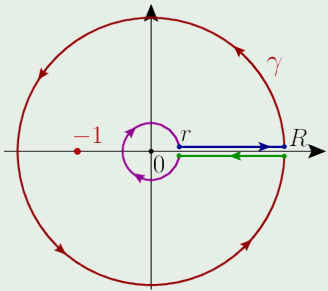
Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \leq -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.)



Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \leq -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.)

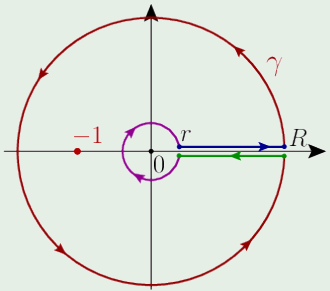
$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\, dx,$$



Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \leq -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

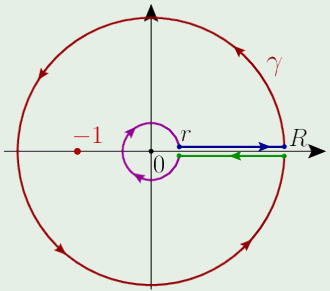


Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \leq -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n \cdot R\Big),$$

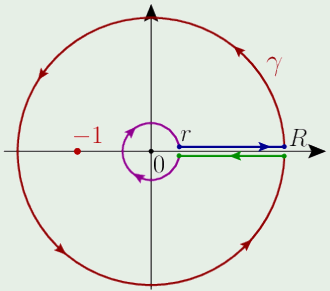


Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \leq -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n \cdot R\Big), \qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log \frac{1}{r})^n \cdot r\Big).$$

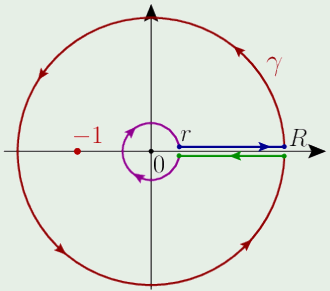


Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \le -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \le \arg z \le 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n \cdot R\Big), \qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log \frac{1}{r})^n \cdot r\Big).$$



Reziduumtétel:

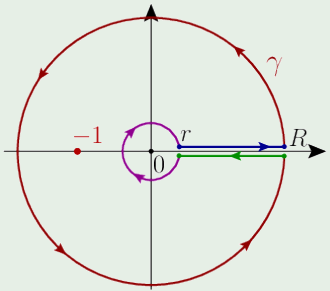
$$\sum_{r<|c|<R} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\cdot p(\log z)\,\mathrm{d}z$$

Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \le -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \le \arg z \le 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n \cdot R\Big), \qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log \frac{1}{r})^n \cdot r\Big).$$



Reziduumtétel:

$$\sum_{r<|c|<R} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\cdot p(\log z)\,\mathrm{d}z$$

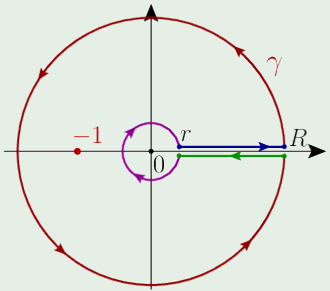
$$= \int_r^R f(x)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x$$

Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \le -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \le \arg z \le 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n \cdot R\Big), \qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log \frac{1}{r})^n \cdot r\Big).$$



Reziduumtétel:

$$\sum_{r<|c|<R} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\cdot p(\log z)\,\mathrm{d}z$$

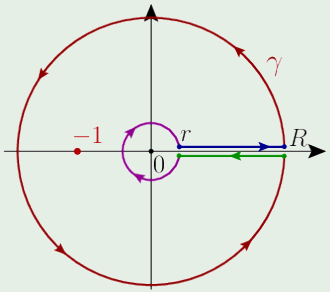
$$= \int_r^R f(x)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x + O\Big(R^{d+1}(\log R)^n\Big)$$

Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \le -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \le \arg z \le 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n \cdot R\Big), \qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log \frac{1}{r})^n \cdot r\Big).$$



Reziduumtétel:

$$\sum_{r<|c|<R} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\cdot p(\log z)\,\mathrm{d}z$$

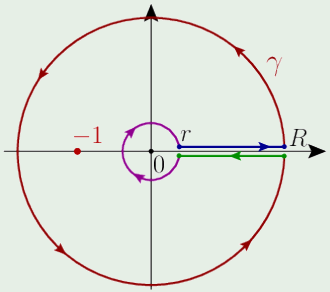
$$= \int_r^R f(x)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x + O\Big(R^{d+1}(\log R)^n\Big) + O\Big((\log \frac{1}{r})^n \cdot r\Big).$$

Példa (kulcslyuk görbén integrálunk)

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \le -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z) \cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \le \arg z \le 2\pi$.)

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\,dx, \qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\,dx,$$

$$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n \cdot R\Big), \qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log \frac{1}{r})^n \cdot r\Big).$$



Reziduumtétel:

$$\sum_{r<|c|<R} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\cdot p(\log z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_r^R f(x)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x + O\Big(R^{d+1}(\log R)^n\Big) + O\Big((\log\frac{1}{r})^n \cdot r\Big).$$

$r \to 0$, $R \to \infty$ határátmenet: $\displaystyle\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log x)\Big).$

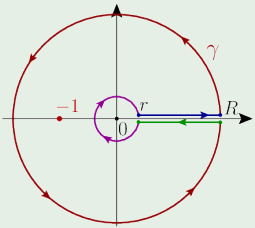
Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

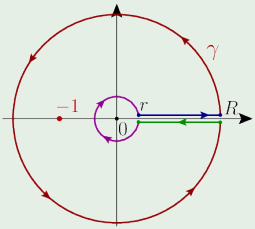
$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

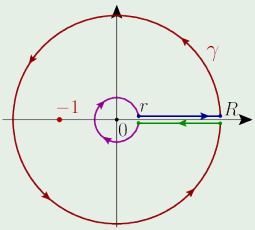
polinomra

$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

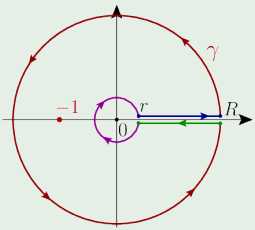
$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

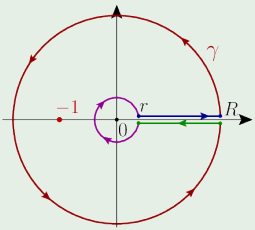
$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

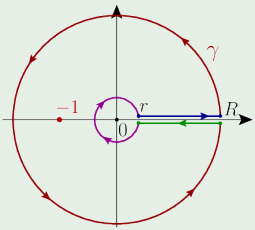
$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{p(\log z)}{(z+1)^2}$$

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

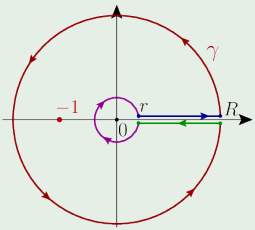
$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{p(\log z)}{(z+1)^2}$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=-1}\Big(p(\log z)\Big)'\Big|_{z=-1}$$

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

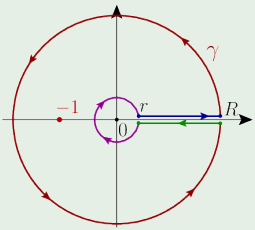
$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{p(\log z)}{(z+1)^2}$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=-1}\Big(p(\log z)\Big)'\Big|_{z=-1} = p'(\log(-1))\cdot\frac{1}{-1}$$

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

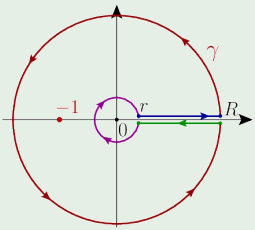
$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{p(\log z)}{(z+1)^2}$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=-1}\Big(p(\log z)\Big)'\Big|_{z=-1} = p'(\log(-1))\cdot\frac{1}{-1} = -p'(\pi i)$$

Példa

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x) - p(\log x + 2\pi i)}{2\pi i}\,\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big).$$



Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

$$\frac{p(X) - p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{p(\log z)}{(z+1)^2}$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=-1}\Big(p(\log z)\Big)'\Big|_{z=-1} = p'(\log(-1))\cdot\frac{1}{-1} = -p'(\pi i) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Végtelen sorok összegének kiszámítása

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

$$\frac{1}{1^4 + 1} + \frac{1}{2^4 + 1} + \frac{1}{3^4 + 1} + \frac{1}{4^4 + 1} + \ldots = ?$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = ?$$

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname*{Res}_{z=k} \Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = f(k)$.

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = f(k)$.

(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname*{Res}_{z=k} \Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = f(k)$.

(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.

Biz. (a) $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ pólusai ott vannak, ahol $\sin(\pi z) = 0$, vagyis az egész helyeken.

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = f(k)$.

(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.

Biz. (a) $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ pólusai ott vannak, ahol $\sin(\pi z) = 0$, vagyis az egész helyeken.

(b) $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=k} = 1.$

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname*{Res}_{z=k} \Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = f(k)$.

(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.

Biz. (a) $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ pólusai ott vannak, ahol $\sin(\pi z) = 0$, vagyis az egész helyeken.

(b) $\operatorname*{Res}_{z=k} \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=k} = 1.$

(c) Az $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$-nek a k helyen elsőrendű pólusa van, tehát

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = f(k)$.

(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.

Biz. (a) $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ pólusai ott vannak, ahol $\sin(\pi z) = 0$, vagyis az egész helyeken.

(b) $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=k} = 1.$

(c) Az $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$-nek a k helyen elsőrendű pólusa van, tehát

$$\operatorname{Res}_{z=k} \Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = f(k) \cdot \operatorname{Res}_{z=k} \Big(\pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = f(k).$$

Lemma

(a) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

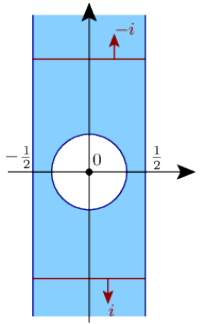
(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.

Biz. (a) $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ pólusai ott vannak, ahol $\sin(\pi z) = 0$, vagyis az egész helyeken.

(b) $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\Big|_{z=k} = 1.$

(c) Az $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$-nek a k helyen elsőrendű pólusa van, tehát
$\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k) \cdot \operatorname{Res}_{z=k}\Big(\pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k).$

(d) $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$ esetén $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) \to \mp i$, ezért pl. a $|\operatorname{Re} z| \le \frac{1}{2}$, $|z| > 1/3$ perióduson a függvény korlátos.



Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leq -2$, akkor $\sum_{c \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c} \Big(f(z) \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \Big) = 0$.

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leq -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leq -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai.

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leq -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

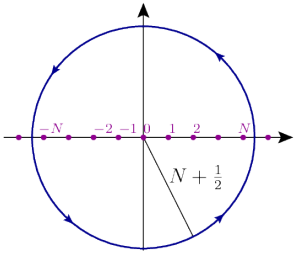
Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leq -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N + \frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.

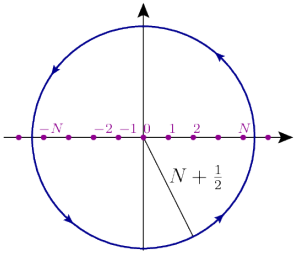


Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leq -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.



(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N + \frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.

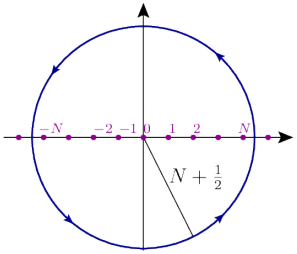
A körvonalon $|f(z)| = O(N^{\deg f}) \leq O(N^{-2})$, $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leq -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.



(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N + \frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.

A körvonalon $|f(z)| = O(N^{\deg f}) \leq O(N^{-2})$, $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

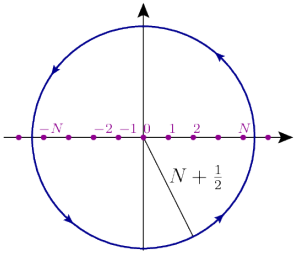
$$\sum_{|c|\leq N} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big)$$

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leq -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.



(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N + \frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.

A körvonalon $|f(z)| = O(N^{\deg f}) \leq O(N^{-2})$, $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

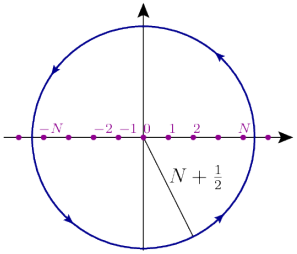
$$\sum_{|c|\leq N} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\,\mathrm{d}z$$

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \le -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.



(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N + \frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.

A körvonalon $|f(z)| = O(N^{\deg f}) \le O(N^{-2})$, $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

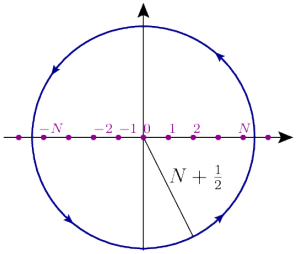
$$\sum_{|c|\le N} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\,\mathrm{d}z = O\Big(\frac{1}{N^2}\cdot N\Big)$$

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \le -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.



(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N + \frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.

A körvonalon $|f(z)| = O(N^{\deg f}) \le O(N^{-2})$, $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

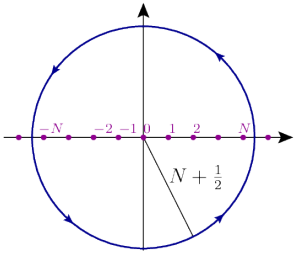
$$\sum_{|c|\le N} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\,\mathrm{d}z = O\Big(\frac{1}{N^2}\cdot N\Big) = O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Lemma

(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \le -2$, akkor $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Biz. (b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.



(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N + \frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.

A körvonalon $|f(z)| = O(N^{\deg f}) \le O(N^{-2})$, $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

$$\sum_{|c|\le N} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\,\mathrm{d}z = O\Big(\frac{1}{N^2}\cdot N\Big) = O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Az $N\to\infty$ határátmenetből $\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z = z^{-1} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \ldots$

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z = z^{-1} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \ldots$

Átírva πz-vel: $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = z^{-3} - \frac{\pi^2}{3} z^{-1} - \frac{\pi^4}{45} z - \ldots,$

Példa:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname*{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z = z^{-1} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \ldots$

Átírva πz-vel: $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = z^{-3} - \frac{\pi^2}{3}z^{-1} - \frac{\pi^4}{45}z - \ldots,$ tehát $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$

Példa:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z = z^{-1} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \ldots$

Átírva πz-vel: $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = z^{-3} - \frac{\pi^2}{3} z^{-1} - \frac{\pi^4}{45} z - \ldots,$ tehát $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}$$

Példa:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z = z^{-1} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \ldots$

Átírva πz-vel: $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = z^{-3} - \frac{\pi^2}{3}z^{-1} - \frac{\pi^4}{45}z - \ldots,$ tehát $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{3}$$

Példa:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=?$$

Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z = z^{-1} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \ldots$

Átírva πz-vel: $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = z^{-3} - \frac{\pi^2}{3}z^{-1} - \frac{\pi^4}{45}z - \ldots,$ tehát $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok.

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva.

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \dfrac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \dfrac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???**

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \dfrac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???** (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban;

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \dfrac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???** (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra).

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \dfrac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???** (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra). A függvénynek elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken.

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???** (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra). A függvénynek elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken. Gond, hogy a függvény gyorsan nő, és nem könnyű kiszámolni sem...

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???** (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra). A függvénynek elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken. Gond, hogy a függvény gyorsan nő, és nem könnyű kiszámolni sem...
  Érdekesség: $\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???** (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra). A függvénynek elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken. Gond, hogy a függvény gyorsan nő, és nem könnyű kiszámolni sem...
  Érdekesség: $\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$
- $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = (\log \Gamma(s))'$ (digamma függvény) **???**

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???** (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra). A függvénynek elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken. Gond, hogy a függvény gyorsan nő, és nem könnyű kiszámolni sem...
  Érdekesség: $\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$
- $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = (\log \Gamma(s))'$ (digamma függvény) **???** Ennek is elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken, 1 reziduummal, és nem is nő nagyon gyorsan; a logaritmus megszelídíti...

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/3$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}$.
- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (Gamma-függvény) **???** (Az integrál lokálisan egyenletesen konvergens a jobb félsíkban; a $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ függvényegyenlettel kiterjeszthetjük az egész síkra). A függvénynek elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken. Gond, hogy a függvény gyorsan nő, és nem könnyű kiszámolni sem...
  Érdekesség: $\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$
- $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = (\log \Gamma(s))'$ (digamma függvény) **???** Ennek is elsőrendű pólusai vannak a nempozitív egész helyeken, 1 reziduummal, és nem is nő nagyon gyorsan; a logaritmus megszelídíti...
  $\psi(1-s) - \psi(s) = \pi \operatorname{ctg}(\pi s)$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right) = 0$$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ és a } 0.$$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)$$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} \cdot (-1)^{k+1}$$

Példa:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=0;\quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{3}{2},\pm\tfrac{5}{2},\ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}\cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} \cdot (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + O\big(|z|^4\big)$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ és a 0.}$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} \cdot (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

Példa:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ és a 0.}$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} \cdot (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \frac{\pi}{z^3} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + O\big(|z|^4\big)\right)^{-1}$$

Példa:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=0;\quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{3}{2},\pm\tfrac{5}{2},\ldots \text{ és a 0.}$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}\cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z)=1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)^{-1}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1+\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)$$

Példa:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=0;\quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{3}{2},\pm\tfrac{5}{2},\ldots \text{ és a 0.}$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}\cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z)=1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)^{-1}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1+\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)=\pi z^{-3}+\frac{\pi^3}{2}z^{-1}+O\big(|z|\big)$$

Példa:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=0;\quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{3}{2},\pm\tfrac{5}{2},\ldots \text{ és a 0.}$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}\cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z)=1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)^{-1}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1+\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)=\pi z^{-3}+\frac{\pi^3}{2}z^{-1}+O\big(|z|\big)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{\pi^3}{2}.$$

Példa:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=0;\quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{3}{2},\pm\tfrac{5}{2},\ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}\cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z)=1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)^{-1}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1+\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)=\pi z^{-3}+\frac{\pi^3}{2}z^{-1}+O\big(|z|\big)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{\pi^3}{2}.$$

$$0=\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)$$

Példa:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=0;\quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{3}{2},\pm\tfrac{5}{2},\ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}\cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z)=1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)^{-1}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1+\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)=\pi z^{-3}+\frac{\pi^3}{2}z^{-1}+O\big(|z|\big)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{\pi^3}{2}.$$

$$0=\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{\pi^3}{2}-8\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

Példa:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=?$$

$$\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=0;\quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{3}{2},\pm\tfrac{5}{2},\ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}\cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z)=1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)$, tehát

$$\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)^{-1}=\frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1+\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)=\pi z^{-3}+\frac{\pi^3}{2}z^{-1}+O\big(|z|\big)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{\pi^3}{2}.$$

$$0=\sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)=\frac{\pi^3}{2}-8\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3},\qquad \text{tehát:}\quad \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

Mára vége