# Analízis 3 jegyzetek

(Utolsó módosítás: 2021. szeptember 14., 10:04)

## A tervezett témák

**2/3. hét, szept. 6–19:** Topológiai alapfogalmak véges dimenziós euklideszi terekben. Konvergencia és topologikus alapfogalmak (belső pont, határpont, külső pont, torlódási pont, izolált pont, nyílt halmaz, zárt halmaz, kompakt halmaz) euklideszi és metrikus terekben. Többváltozós, illetve metrikus téren értelmezett függvények és leképezések határértéke és folytonossága. Átviteli elvek. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban.

**4/5/6. hét, szept 20 – okt. 10:** Többváltozós függvények differenciálszámítása. Deriválás koordinátafüggvényenként. Szélsőérték-keresés kompakt halmazon értelmezett függvényekre. Iránymenti és parciális deriváltak, Jacobi-mátrix. A gradiens. Érintősík. Lagrange-féle középértéktétel. A Lagrange-féle becslés leképezésekre. A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételei. Az inverz leképezés deriváltja, inverzfüggvénytétel. Az implicit leképezés tétele. Feltételes szélsőérték-feladat, Lagrange-féle multiplikátorszabály. $n$-szer differenciálható leképezések. A Young-tétel. A Taylor-formula. Lokális szélsőérték szükséges, ill. elégséges feltételei.

**7/8/10. hét, okt. 11 – nov. 7:** Jordan-mérték és többváltozós integrálszámítás. A Jordan-féle belső és külső mérték. A határ külső mértéke. Jordan-mérhető halmazok. A mérhetőség pontos feltétele. A konvex poliéderek és a normáltartományok mérhetősége. A parallelepipedonok térfogata. A Jordan-mérték egybevágóság-invarianciája. A többszörös integrál. Definíció, alaptulajdonságok, az integrálhatóság ekvivalens feltételei. Folytonos és korlátos függvények integrálhatósága. Egy halmaz mérhetőségének és karakterisztikus függvénye integrálhatóságának ekvivalenciája. Folytonos függvénnyel való kompozíció integrálhatósága. A lebontási tétel. A Cavalieri-elv. Normáltartományok térfogata. A gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció. Polárkoordinátás helyettesítés.

**11/12. hét, nov. 8–21:** Paraméteres integrálok. Paraméteres integrálok folytonossága, differenciálása és integrálása. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, differenciálása és integrálása. Elégséges feltétel az improprius paraméteres integrál egyenletes konvergenciájára. Gamma- és Béta-függvény.

**13/14/15. hét, nov. 22 – dec. 12.:** Valós vonalintegrálok és integráltételek. Görbék ívhossza. A vonalintegrál és kiszámítása. A Newton-Leibniz-formula. A primitív függvény létezésének feltételei. Vonalintegrál és homotópia. Gauss-féle összekapcsolódási szám. Divergencia és rotáció; integráltételek két és három dimenzióban. Maxwell-egyenletek.

# Emlékeztető az Analízis 3 előadásokról (2021. ősz)

### 1. előadás, 2021. szept. 6.

Euklideszi távolság $\mathbb{R}^p$-ben. Nyílt és zárt gömbök. Konvergens pontsorozatok. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. $a_n \to b$ akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, 2, \dots, p$ esetén $a_{n,i} \to b_i$. Linearitás. Cauchy-tulajdonság. Az $(\mathbb{R}^p, |.|)$ tér teljes. Korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

Normák. A $\|.\|_q$ $(q \geqslant 1)$ és $\|.\|_\infty$ normák. $0 < q < 1$ esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség. Minkowski egyenlőtlenség.

### 2. előadás, 2021. szept. 7.

$1 \leqslant q \leqslant \infty$ esetén $\|.\|_q$ tényleg norma. Normák ekvivalenciája. $\mathbb{R}^p$-ben bármely $\|.\|$ norma ekvivalens az $|.|$ normával. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpéldák végtelen dimenziós esetben. `https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf`

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja. Halmaz belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz. [LTS2, 13–19. o.]

### 3. előadás, 2021. szept. 13.

Halmaz lezártja. Cantor metszettétel. Kompakt halmaz definíciója. Borel tétel, bizonyítás Lindelöf-lemmával és Cantor metszettétellel. Kompakt és vele diszjunkt zárt halmaz távolsága pozitív A hegymászós feladat, hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség.

# I. Topológiai alapfogalmak $\mathbb{R}^p$-ben

## 1. Pontsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$-ben

Euklideszi távolság $\mathbb{R}^p$-ben. Nyílt és zárt gömbök. Konvergens pontsorozat. Ekvivalens átfogalmazások. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. $a_n \to b$ akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, 2, \ldots, p$ esetén $a_{n,i} \to b_i$. Linearitás. Cauchy-tulajdonság. Az $(\mathbb{R}^p, |.|)$ tér teljes. Korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

### 1.1. Mese ($p$-dimenziós euklideszi tér)

- Pontok: $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{p} = \{(x_1, \ldots, x_p) : x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}\}$;
- $\mathbb{R}$ fölötti vektortér
- Euklideszi norma: $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}$
  - $|x| \geqslant 0$, egyenlőség csak $x = 0^p$ esetén
  - $|cx| = |c| \cdot |x|$
  - $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; indukcióval akárhány tagra
- Euklideszi távolság: $d(x, y) = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_p - x_p)^2}$
- Skaláris szorzat: $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_py_p$.

### 1.2. Definíció (nyílt és zárt gömbök)

Ha $(H, d)$ metrikus tér, akkor az $a \in H$ körüli, $r > 0$ sugarú "nyílt" és "zárt" gömb:

$$B(a, r) = \{x \in H : d(x, a) < r\}, \quad \text{illetve} \quad \overline{B}(a, r) = \{x \in H : d(x, a) \leqslant r\}.$$

Az euklideszi térben

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| < r\}, \quad \overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| \leqslant r\}.$$

### 1.3. Definíció (pontsorozat limesze)

Legyen $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}^p$ és $b \in \mathbb{R}^p$. Az $(a_n)$ pontsorozat limesze (limeszpontja) $b$, avagy az $(a_n)$ pontsorozat $b$-hez tart, avagy $a_n \to b$, avagy $\lim a_n = b$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left\{ \begin{array}{c} \exists n_0 \ \forall n > n_0 \\ \exists n_0 \ \forall n \geqslant n_0 \\ \text{elég nagy } n\text{-re} \\ \text{véges sok } n \text{ kivételével} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} d(a_n, b) < \varepsilon \\ |a_n - b| < \varepsilon \\ a_n \in B(b, \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

A pontsorozat konvergens, ha van limesze, illetve divergens, ha nincs.

**1.4. Tétel**

Legyen

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2p} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}, \quad \dots, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Ezek ekvivalensek:

(a) $\mathbf{a}_n \to \mathbf{b}$

(b) $|\mathbf{a}_n - \mathbf{b}| \to 0$

(c) mindegyik $1 \leqslant i \leqslant p$-re $a_{n,i} \to b_i$.

**1.5. Tétel**

- A limeszpont egyértelmű.
- Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát.
- Konvergens sorozat minden részsorozata is ugyanoda tart.
- Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, és $c, d \in \mathbb{R}$, akkor $(ca_n + db_n) \cdot cA + dB$.

**1.6. Definíció (Cauchy-tulajdonság)**

Legyen $(a_n)$ pontsorozat valamely $(H, d)$ metrikus térben. Az $(a_n)$ sorozat "Cauchy-tulajdonságú", ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n > n_0 \; d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

**1.7. Trivialitás**

Minden konvergens pontsorozat Cauchy-tulajdonságú.

**Bizonyítás.** ($\Rightarrow$): legyen $b = \lim a_n$; $\forall \varepsilon > 0$-ra $d(a_m, a_n) \leqslant d(a_m, b) + f(a_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ VSK.

**1.8. Tétel (Cauchy-kritérium)**

$\mathbb{R}^p$-ben bármely pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-tulajdonságú.

**Bizonyítás.** ($\Leftarrow$): $(a_n)$ Cauchy $\Rightarrow$ $(a_n)$ koordinátánként Cauchy $\Rightarrow$ $(a_n)$ koordinátánként konv $\Rightarrow$ $(a_n)$ konv

**1.9. Definíció (teljes metrikus tér)**

Egy metrikus tér "teljes", ha a térben minden Cauchy-sorozat konvergens.
Pl. Az $\mathbb{R}^p$ euklideszi tér teljes.

### 1.10. Definíció (korlátos halmaz)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$. A $H$ halmaz "korlátos", ha (ezek ekvivalensek):

- az $\{|x| : x \in K\}$ számhalmaz korlátos, avagy $\exists r \in \mathbb{R}\ H \subset B(0, r)$;
- minden $1 \leqslant i \leqslant p$-re az $\{x_i : x \in K\}$ számsorozat korlátos.

### 1.11. Definíció (korlátos pontsorozat)

Legyen $(a_n)$ pontsorozat $\mathbb{R}^p$-ben. Az $(a_n)$ sorozat "korlátos", ha (ezek ekvivalensek):

- az $\{a_1, a_2, \dots\}$ halmaz korlátos;
- az $|a_n|$ számsorozat korlátos, avagy $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n\ |a_n| \leqslant K$
- minden $1 \leqslant i \leqslant p$-re az $(a_{n,i})$ számsorozat korlátos

### 1.12. Tétel (Bolzano–Weierstrass tétel)

$\mathbb{R}^p$-ben minden korlátos sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.

**Bizonyítás.** Az egydimenziós Bolzano–Weierstrass tételt alkalmazzuk $p$-szer.

# 2. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban

Norma, metrika, A $\|.\|_q$ ($q \geqslant 1$) és $\|.\|_\infty$ normák. Hölder- és Minkowski egyenlőtlenség. Véges dimenzióban minden norma ekvivalens. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpélda végtelen dimenzióban.

**2.1. Definíció (norma)**

Az $\|.\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény "norma", ha

- Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|x\| \geqslant 0$;
- $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0^p$;
- Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektor és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$;
- Bármely $x, y \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

**2.2. Definíció ($L_q$-norma)**

$0 < q < \infty$ és $x \in \mathbb{R}^p$ esetén legyen

$$\|x\|_q = \left(|x_1|^q + \ldots + |x_p|^q\right)^{1/q},$$

továbbá legyen

$$\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|, \ldots, |x_p|\right).$$

Vegyük észre, hogy $\|x\|_2 = |x|$ és $\|x\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|x\|_q$.

**2.3. Megjegyzés**

Leggyakrabban az $L_1$, $L_2$ és az $L_\infty$ normákat szoktuk használni.

**2.4. Megjegyzés**

$0 < q < 1$ esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség; pl. 2-dimenzióban

$$\left\|(1,1)\right\|_q = 2^{1/q} > 2 = \left\|(1,0)\right\|_q + \left\|(0,1)\right\|_q.$$

**2.5. Tétel (Hölder-egyenlőtlenség)**

Ha $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$ és $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, akkor tetszőleges $a_1, \ldots, a_p$ és $b_1, \ldots, b_p$ számokra

$$\|a\|_q \cdot \|b\|_r = \left(|a_1|^q + \ldots + |a_p|^q\right)^{1/q} \cdot \left(|b_1|^r + \ldots + |b_p|^r\right)^{1/r} \geqslant |a_1 b_1| + \ldots + |a_p b_p|.$$

**Bizonyítás.** Ha $a$ vagy $b$ a nullvektor, akkor mindkét oldal 0, és kész.
Ha $q = 1$ és $r = \infty$, akkor trivi:

$$B.O. = \left(|a_1| + \ldots + |a_p|\right) \cdot \max |b_i| \geqslant J.O.$$

Marad az, ha $1 < q, r < \infty$ és egyik vektor sem 0.

Az egyenlőtlenség homogén; az $a$ és a $b$ vektort is végigoszthatjuk egy-egy számmal, és ekvivalens állítást kapunk. Tehát feltételezhetjük, hogy $\|a\|_q = 1$ és $\|b\|_r = 1$. Írjuk fel a súlyozott számtani-mértanit az $|a_i|^q$ és $|b_i|^r$ számokra $1/q$ és $1/r$ súlyokkal:

$$|a_i b_i| = \left(|a_i|^q\right)^{1/q}\left(|b_i|^r\right)^{1/r} \leqslant \frac{1}{q}|a_i|^q + \frac{1}{r}|b_i|^r;$$

összegezve

$$\sum |a_i b_i| \leqslant \frac{1}{q}\sum |a_i|^q + \frac{1}{r}\sum |b_i|^r = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 = \|a\|_q \cdot \|b\|_r.$$

**2.6. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség)**

Ha $1 \leqslant q \leqslant \infty$ és $a, b \in \mathbb{R}^p$, akkor

$$\|a+b\|_q \leqslant \|a\|_q + \|b\|_q.$$

**Bizonyítás.** Három speciális eset:
Ha $q = \infty$, akkor trivi:

$$\|a+b\|_\infty = \max |a_i + b_i| \leqslant \max\left(|a_i| + |b_i|\right) \leqslant \max |a_i| + \max |b_i| = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

Ha $q = 1$, akkor is trivi:

$$\|a+b\|_1 = \sum |a_i + b_i| \leqslant \sum \left(|a_i| + |b_i|\right) = \|a\|_1 + \|b\|_1.$$

Ha $\|a+b\|_q = 0$, akkor is trivi, mert

$$\|a+b\|_q = 0 \leqslant \|a\|_q + \|b\|_q.$$

Az általános esetben $1 < q < \infty$ és $a + b \neq 0$. Legyen $r = \frac{q}{q-1}$ a $q$ *konjugált kitevőpárja*, amelyre $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

$$\|a+b\|_q{}^q = \sum |a_i + b_i|^q = \sum \left(|a_i + b_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}}\right) \leqslant \sum |a_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}} + \sum |b_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}} \overset{\text{Hölder } 2\times}{\leqslant}$$
$$\leqslant \left(\sum |a_i|^q\right)^{1/q}\left(\sum |a_i + b_i|^q\right)^{1/r} + \left(\sum |b_i|^q\right)^{1/q}\left(\sum |a_i + b_i|^q\right)^{1/r} = \left(\|a\|_q + \|b\|_q\right) \cdot \|a+b\|_q{}^{q-1}.$$

Végül leosztunk.

**2.7. Következmény**

$\|.\|_q$ norma minden $1 \leqslant q \leqslant \infty$ esetén.

**2.8. Definíció**

Az $\|.\|$ és $\|.\|'$ normák ekvivalensek, ha léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ számok, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektorra

$$c_1|x| \leqslant \|x\| \leqslant c_2|x|.$$

**2.9. Példa**

Az $|.|$, $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ normák ekvivalensek, mert

$$\frac{1}{\sqrt{p}}|x| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{p} \cdot |x|$$

**2.10. Tétel (a normák ekvivalenciája)**

$\mathbb{R}^p$-ben bármely $\|.\|$ norma ekvivalens az $|.|$ normával, azaz léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ számok, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektorra

$$c_1|x| \leqslant \|x\| \leqslant c_2|x|.$$

**Bizonyítás.** A felső becslés: legyenek a koordináta-egységvektorok $e_1, \ldots, e_p$. Ekkor

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \ldots + x_pe_p\| \leqslant \|x_1e_1\| + \ldots + \|x_pe_p\| = |x_1| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x_p| \cdot \|e_p\| \leqslant$$
$$\leqslant |x| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x| \cdot \|e_p\| = \big(\|e_1\| + \ldots + \|e_p\|\big) \cdot |x|,$$

Tehát például $c_2 = \|e_1\| + \ldots + \|e_p\|$ megfelelő.

Az alsó becsléshez tegyük fel indirekt, hogy nincs ilyen $c_1$. Ezek szerint minden pozitív egészre $c_1 = \frac{1}{n}$ nem jó, vagyis van olyan $x_n$ vektor, amelyre $\|x_n\| < \frac{1}{n}|x_n|$. Az $x_n$ nem lehet a nullvektor, és így a skálázhatóság miatt feltehetjük, hogy $|x_n| = 1$.

Az Bolzano-Weierstrass tétel miatt a korlátos $(x_n)$ sorozatnak van egy konvergens $(x_{n_k})$ részsorozata. Ennek limeszpontja legyen $y$. A részsorozat koordinátánként $y$-hez tart; az abszolútérték definíciója miatt

$$|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \Big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k,i}\Big)^2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_{n_k,i}^2} = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k}| = \lim_{k\to\infty} 1 = 1.$$

A részsorozatban $|x_{n_k} - y| \to 0$. A már bizonyított felső becslés szerint $0 \leqslant \|x_{n_k} - y\| \leqslant c_2|x_{n_k} - y|$; a rendőr-elv miatt $\|x_{n_k} - y\| \to 0$. Ezek után

$$0 < \|y\| \leqslant \|x_{n_k}\| + \|y - x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} + c_2|y - x_{n_k}| \to 0,$$

ellentmondás.

**2.11. Következmény**

Véges dimenzióban a pontsorozatok konvergenciája nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Bármelyik normát is használjuk, ugyanazok a sorozatok lesznek konvergensek.

**2.12. Példa**

Végtelen dimenzióban a különböző normák nem feltétlenül ekvivalensek.

- Legyen $C[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények vektortere. Ezen a téren két lehetséges norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ és $\|f\|_\infty = \max |f|$.

  Vizsgáljuk az $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & x < 1/n \\ 0 & x \geqslant 1/n \end{cases}$ függvényeket. Ezekre $\|f_n\|_1 \to 0$ és $\|f_n\|_\infty = 1$. Az $L_1$ norma szerint az $(f_n)$ sorozat a konstans 0 függvényhez tart, az $L_\infty$ norma szerint nem tart oda, és nem is Cauchy-sorozat.

- Ugyanezen a téren $\|f\|_2 = \int_0^1 x|f(x)| \,\mathrm{d}x$ és $\|f\|_3 = \int_0^1 (1-x)|f(x)| \,\mathrm{d}x$ két olyan norma, amelyeknek az aránya sem alulról, sem felülről nem korlátos.

# 3. Nyílt és zárt halmazok

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja. Halmaz belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz, halmaz lezártja. [LTS2, 13–19. o.]

**3.1. Definíció**

- Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja.
- Halmaz belseje, külseje, határa.
- Nyílt halmaz, zárt halmaz, halmaz lezártja.
- Torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz.

**3.2. Példa**

- Az egész tér egyszerre nyílt és zárt is.
- Az üres halmaz egyszerre nyílt és zárt is.
- A nyílt gömbök nyílt halmazok.
- A zárt gömbök zárt halmazok.
- Az $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_p, b_p)$ nyílt téglák nyílt halmazok.
- Az $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ zárt téglák zárt halmazok.

**3.3. Tétel**

- Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha az elemeiből képzett konvergens sorozatok limeszei is elemei.
- Bármely halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementuma zárt.
- Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nyílt.
- Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
- Zárt halmazok tetszőleges rendszerének metszete zárt.
- Véges sok zárt halmaz uniója zárt.

**3.4. Példa**

- A $B(0, 1/n)$ nyílt gömbök metszete nem nyílt.
- A $\overline{B}(0, 1 - 1/n)$ zárt gömbök uniója nem zárt.

**3.5. Definíció**

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. Egy $S \subset G$ halmaz "sűrű" $G$-ben, ha

$$\forall a \in G \quad \forall r > 0 \quad S \cap B(a, r) \neq \varnothing.$$

**3.6. Példa**

$\mathbb{Q}^p$ és $\mathbb{R}^p \setminus \mathbb{Q}^p$ sűrű.

**3.7. Tétel**

A belső/külső pont, nyílt halmaz stb. fogalmak nem függnek attól, hogy melyik normát használjuk.

# 4. Kompakt halmazok

Cantor-metszettétel. Kompakt halmazok. Racionális gömbök, Lindelöf-lemma, Borel tétele. Nemüres kompakt és vele diszjunkt nemüres zárt halmaz távolsága pozitív. [LTS2, 18, 21–24. o.]

**4.1. Tétel (Cantor metszettétel)**

Ha $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ korlátos, zárt, nemüres halmazok, akkor $\bigcap K_n \neq \varnothing$.

**4.2. Példa**

A $A_n = \{\mathbf{x} : x_1 \geqslant n\}$ zárt félterek zártak és nemüresek, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, de a metszetük üres.
A $B_n = B(1/n, 1/n)$ gömbök korlátosak és nemüresek, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, de a metszetük üres.

**4.3. Definíció (kompaktság)**

Egy $K \subset \mathbb{R}^p$ halmaz "kompakt", ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

**4.4. Definíció (racionális gömb)**

$B(a, r)$ "racionális gömb", ha $a \in \mathbb{Q}^p$ és $r \in \mathbb{Q}$.

**4.5. Tétel**

Minden nyílt halmaz előáll racionális gömbök uniójaként.

**4.6. Lemma (Lindelöf)**

Nyílt halmazok tetszőleges $G_i$ $(i \in I)$ rendszeréből kiválasztható egy megszámlálható részrendszer, amelynek uniója ugyanaz, vagyis létezik olyan megszámlálható $J \subset I$ indexhalmaz, hogy

$$\bigcup_{i \in J} G_i = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

**4.7. Tétel (Borel)**

$K \subset \mathbb{R}^p$ akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

**4.8. Definíció**

Ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ nemüres halmazok, akkor ezek távolsága

$$dist(A, B) = \inf \left\{ |a - b| : a \in A, b \in B \right\}.$$

**4.9. Tétel**

Tegyen $K \subset \mathbb{R}^p$ kompakt és $Z \subset \mathbb{R}$ zárt, egyik sem üres.
(a) Léteznek olyan $a \in K$ és $b \in Z$ pontok, amelyekre $|a - b| = dist(K, Z)$.
(b) Ha $K$ és $Z$ diszjunkt, akkor $dist(K, Z) > 0$.

# 5. Összefüggő halmazok

Hegymászós feladat; hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő. Példa összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő halmazra. $\mathbb{R}^p$ összefüggő. $\mathbb{R}^p$-ben az üres halmazon és az egész téren kívül nincs más halmaz, amely egyszerre nyílt és zárt is. [LTS2, 19–21. o.]

**5.1. Kérdés (hegymászós feladat)**

Két hegymászó az $y = h(x)$ grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol $h : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvény, és $h(0) = h(1) = 0$. Az egyik hegymászó a $(0,0)$, a másik az $(1,0)$ pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni, hogy mászás közben minden pillanatban azonos magasságban vannak. Sikerülhet-e ez nekik?
(Avagy: léteznek-e biztosan olyan $f, g : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvények, amelyekre $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(1) = g(1)$, és minden $t \in [0,1]$ pillanatban $h(f(t)) = h(g(t))$?

Hibás bizonyítás arra, hogy a válasz igen.
Példa arra, hogy a válasz nem.

**5.2. Definíció (ívszerű összefüggőség)**

A $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz ívszerűen összefüggő, ha bármelyik két pontja összeköthető a halmazban folytonos görbével, tehát bármely $a, b \in H$ pontokhoz van olyan $\gamma : [0,1] \to H$ folytonos görbe, amelyre $\gamma(0) = a$ és $\gamma(1) = b$.

**5.3. Definíció (összefüggőség)**

A $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz összefüggő, ha

- $H$ nem bontható fel két diszjunkt, nemüres, relatív nyílt halmaz uniójára, vagyis
- Ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmazok, $H \subset A \cup B$ és $H \cap A \cap B = \emptyset$, akkor $H \subset A$ vagy $H \subset B$.

**5.4. Megjegyzés**

Bármely $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha nem bontható fel két diszjunkt, nemüres nyílt halmaz uiójára, avagy

**5.5. Tétel**

Ha egy halmaz ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

**5.6. Példa**

Van olyan halmaz, ami összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő.

**5.7. Következmény**

$\mathbb{R}^p$ összefüggő.

### 5.8. Következmény

A teljes téren és az üres halmazon kívül nincs $\mathbb{R}^p$-nek olyan részhalmaza, ami egyszerre nyílt és zárt.

### 5.9. Tétel

- Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor bármely két pontja összeköthető töröttvonallal.
- Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor ívszerűen összefüggő.
- Minden nyílt halmaz ívszerűen összefüggő komponensekre bontható.
- Minden nyílt halmaz olyan nyílt komponensekre bomlik, amelyekben bármely két pont összeköthető töröttvonallal.

### 5.10. Definíció

Tartomány: nem üres, nyílt, összefüggő halmaz

# Hivatkozások


[LTS1] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis I. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[KG1] K.G.: Normák $\mathbb{R}^p$-ben,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf

[KG2] K.G.: Többváltozós függvények alsó és felső határértéke,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_02_limsup.pdf

[KG3] K.G.: Vektorértékű függvények differenciálása,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_03_VektorErtekuFvek.pdf,
https://www.youtube.com/watch?v=r2nQ87xP5rE

[KG4] K.G.: Inverz- és implicitfüggvény-tétel,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_04_InvImplFv.pdf,
https://www.youtube.com/watch?v=5HiQlIkLhQI

[KG5] K.G.: Analízis 4 jegyzetek
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an4/Analizis4_Jegyzetek_v18.pdf

[KG6] K.G.: Mágneses örvényerősség és összehurkolódási szám
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_05_OsszeHurka.pdf

[BStv] Biot-Savart törvény, Wikipedia,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Biot-Savart-t%C3%B6rv%C3%A9ny

[Atv] Ampère-törvény, Wikipedia,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Maxwell-egyenletek

[LN] Linking Number, Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number

# Előkészületben

## 6. Többváltozós függvények folytonossága és határértéke

**6.1. Definíció ($p$-változós függvény)**

$f : H \to \mathbb{R}$ egy $p$-változós függvény, ha $H \subset \mathbb{R}^p$.

**6.2. Definíció ($p$-változós függvény határértéke)**

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ $p$-változós függvény, $A \subset H$, $a \in A'$, $b \in \mathbb{R}$. Az $f$ függvény határértéke az $a$ pontban az $A$ halmazra szorítkozva $b$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad \left|f(x) - b\right| < \varepsilon$$

avagy, a $b$ bármely $V$ környezetéhez létezik az $a$-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b, \qquad \lim_{a,A} f = b$$

**6.3. Definíció ($p$-változós függvény végtelen határértéke)**

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ $p$-változós függvény, $A \subset H$, $a \in A'$, $b \in \mathbb{R}$.
Az $f$ függvény határértéke az $a$ pontban az $A$ halmazra szorítkozva $\infty$, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad f(x) > K$$

avagy, a $\infty$ bármely $V$ környezetéhez létezik az $a$-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{a,A} f = \infty$.

Az $f$ függvény határértéke az $a$ pontban az $A$ halmazra szorítkozva $-\infty$, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad f(x) < K$$

avagy, a $\infty$ bármely $V$ környezetéhez létezik az $a$-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.

Elkezdtük a határértékeket. Definiáltuk epszilon-deltával és környezetekkel is egy függvény határértékét egy torlódási pontban egy halmazra szorítkozva. Példának az $x^2y/(x^2 + y^2)$ és $xy/(x^2 + y^2)$ volt.

# 7. Többváltozós függvények alsó és felső határértéke

**7.1. Definíció**

Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$, $a$ az $A$ halmaz torlódási pontja, és $f$ olyan $p$-változós, valós értékű függvény, ami valamilyen $r > 0$ esetén értelmes a $\dot{B}(a, r_0) \cap A$ halmazon.
Az $f$ függvény *felső határértéke* avagy *limesz szuperiora* az $a$ pontban, az $A$ halmazra szorítkozva

$$\limsup_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \overline{\lim_{a,A}} f(x) = \lim_{r \to 0+} \sup f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big) = \inf_{r>0} \sup f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big).$$

Megjegyzés. A $\dot{B}(a,r) \cap A$ biztosan nem üres, mert $a$ torlódási pont. Nagyobb $r$-hez bővebb $\dot{B}(a,r) \cap A$ és $f\big(\dot{B}(a,r) \cap A\big)$ halmazt kapunk, ezért az $r \mapsto f\big(\dot{B}(a,r) \cap A\big)$ függvény (nem szig.) monoton növekvő. Az értéke (a szuprémum) $+\infty$ is lehetm de ettől még tudunk határértlket venni. A monotonitás miatt a határérték egyenlő az infimummal.
Az $f$ függvény *alsó határértéke* avagy *limesz inferiora* az $a$ pontban, az $A$ halmazra szorítkozva

$$\liminf_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \underline{\lim_{a,A}} f(x) = \lim_{r \to 0+} \inf f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big) = \sup_{r>0} \inf f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big).$$

**7.2. Lemma**

1a. Ha $\limsup_{a,A} f > \alpha$, akkor $\forall r > 0\ \exists x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) > \alpha$.

1b. Ha $\limsup_{a,A} f < \beta$, akkor $\exists r > 0\ \ \forall x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) < \beta$.

2a. Ha $\liminf_{a,A} f > \alpha$, akkor $\exists r > 0\ \ \forall x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) > \alpha$.

2b. Ha $\liminf_{a,A} f < \beta$, akkor $\forall r > 0\ \exists x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) < \beta$.

**Bizonyítás.** 1a: $\inf_r \sup f\big(\dot{B}(a) \cap A\big) > \alpha$, tehát bármely $r > 0$ esetén $\sup f\big(\dot{B}(a) \cap A\big) > \alpha$.
1b: $\inf_r \sup f\big(\dot{B}(a) \cap A\big) < \beta$, tehát van olyan $r > 0$, amire $\sup f\big(\dot{B}(a) \cap A\big) < \beta$.
2a,2b ugyanúgy.

**7.3. Tétel**

$\liminf_{a,A} f \leqslant \limsup_{a,A} f$, és
$\liminf_{a,A} f = \limsup_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{a,A} f = \alpha$.
Az $\alpha = \pm\infty$ eseteket úgy is lehet írni hogy

- $\lim_{a,A} f = +\infty$ akkor és csak akkor, ha $\liminf_{a,A} f = +\infty$;
- $\lim_{a,A} f = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\limsup_{a,A} f = -\infty$.

**Bizonyítás.** Az első állítás trivi az 7.1.. definícióból: $\inf f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big) \leqslant \sup f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big)$, majd $r \to 0+$ határátmenet.

1. eset: $\alpha = -\infty$. A 7.2.. lemma matt ha $\limsup_{a,A} f = -\infty$, akkor minden $K$ számhoz van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a,r) \cap A$ esetén $f(x) < K$. Ez pedig éppen annak definíciója, hogy $\lim_{a,A} f = -\infty$.

Megfordítva, ha $\lim_{a,A} f = -\infty$, akkor minden $K$ számhoz van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a,r) \cap A$ esetén $f(x) < K$. Ekkor viszont $\limsup_{a,A} f \leqslant \sup f(\dot{B}(a,r) \cap A) \leqslant K$. Ez minden $K$ számra igaz, tehát $\limsup_{a,A} f = -\infty$.

2. eset: $\alpha = +\infty$. ugyanúgy, mint az 1. esetben.
3. eset: $\alpha$ véges.
Ha $\liminf_{a,A} f = \limsup_{a,A} f = \alpha$, akkor a 7.2.. lemma matt minden $0 < \varepsilon < \alpha$-hoz van olyan $r_1$ és $r_2$, hogy bármely

$x \in \dot{B}(a, r_1) \cap A$ esetén $f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$, illetve bármely $x \in \dot{B}(a, r_2) \cap A$ esetén $f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$. Vegyük a két sugár közül a kisebbet: legyen $\delta = \min(r_1, r_2)$. Ekkor tehát bármely $x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A$ esetén $\alpha + \varepsilon > f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$; ez viszont éppen annak a definíciója, hogy $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$.

Megfordítva, ha $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A$ esetén $\alpha + \varepsilon > f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$; ekkor viszont

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \inf f\big(\dot{B}(a, \delta)\big) \leqslant \liminf_{a,A} f \leqslant \limsup_{a,A} f \leqslant \sup f\big(\dot{B}(a, \delta)\big) \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

Tehát

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \alpha - \varepsilon \leqslant \liminf_{a,A} f \leqslant \limsup_{a,A} f \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

**7.4. Tétel**

Legyen

$$L = \big\{ \lim f(x_n) : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a \big\} \subset [-\infty, +\infty].$$

Ekkor $\limsup\limits_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \max L$ és $\liminf\limits_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \min L$.

**Bizonyítás.** Elég a lim sup-ra.

Először azt igazoljuk, hogy $\limsup\limits_{a,A} f \in L$.

1. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = b$ véges. Minden pozitív egész $n$-hez vegyünk egy olyan $x_n$ pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $b - \frac{1}{n} < f(x_n) < b + \frac{1}{n}$. Ilyen létezik, mert a 7.2.. Lemma 1b miatt minden elég közeli pontban $f(x_n) < b + \frac{1}{n}$, és a 7.2.. Lemma 1a miatt az elég közeliek között van olyan pont, amelyre $f(x_n) > b - \frac{1}{n}$ is igaz. A rendőr-elv miatt $f(x_n) \to b$, így $b \in L$.

2. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = +\infty$. Minden pozitív egész $n$-hez vegyünk egy olyan $x_n$ pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $f(x_n) > n$.

3. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$. Minden pozitív egész $n$-hez vegyünk egy olyan $x_n$ pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $f(x_n) < -n$.

Másodszor, az kell, hogy $L$-nek nincs $\limsup\limits_{a,A} f$-nél nagyobb eleme. Tegyük fel indirekt, hogy mégis van egy $\beta \in L$, amire $\beta > \limsup\limits_{a,A} f$. A $\beta$-hoz van egy $x_n \in A$ sorozat, amely $a$-hoz tart, $x_n \neq a$ és $f(x_n) \to \beta$. Vegyünk még egy $c$ számot, amire $\limsup\limits_{a,A} f < c < \beta$. A lemma 1b szerint van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a, r) \cap A$ esetén $f(x) < c$. Mivel $x_n \to a$, véges sok kivétellel minden $x_n$ ilyen. Tehát véges sok kkivétellel $f(x_n) < c$, de ez ellentmond annak, hogy $f(x_n)$ a $c$-nél nagyobb $\beta$-hoz tart.

**7.5. Következmény (átviteli elv)**

$\lim\limits_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha bármely $x_n \in A \backslash \{a\}$ sorozatra, ha $x_n \to a$, akkor $f(x_n) \to \alpha$.

**7.6. Tétel (határátmenet)**

Ha valamilyen $r > 0$-re $x \in \dot{B}(a, r) \cap A$ esetén $f(x) \leqslant g(x)$, akkor $\liminf\limits_{a,A} f \leqslant \liminf\limits_{a,A} g$, és $\limsup\limits_{a,A} f \leqslant \limsup\limits_{a,A} g$.

**Bizonyítás.**Az 7.1.. definícióból triviális.

**7.7. Következmény (rendőr- és honvéd/csősz-elvek)**

(a) Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ halmazon $f \leqslant g \leqslant h$ és $\lim\limits_{a,A} f = \lim\limits_{a,A} h = c$, akkor $\lim\limits_{a,A} g = c$.

(b) Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ halmazon $f \leqslant g$ és $\lim\limits_{a,A} f = \infty$, akkor $\lim\limits_{a,A} g = \infty$.

(c) Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ halmazon $f \leqslant g$ és $\lim\limits_{a,A} g = -\infty$, akkor $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.