

# Analízis 3 jegyzetek

(Utolsó módosítás: 2021. szeptember 30., 7:54)

## A tervezett témák

**2/3. hét, szept. 6–19:** Topológiai alapfogalmak véges dimenziós euklideszi terekben. Konvergencia és topologikus alapfogalmak (belső pont, határpont, külső pont, torlódási pont, izolált pont, nyílt halmaz, zárt halmaz, kompakt halmaz) euklideszi és metrikus terekben. Többváltozós, illetve metrikus téren értelmezett függvények és leképezések határértéke és folytonossága. Átviteli elvek. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban.

**4/5/6. hét, szept. 20 – okt. 10:** Többváltozós függvények differenciálszámítása. Deriválás koordinátafüggvényenként. Szélsőérték-keresés kompakt halmazon értelmezett függvényekre. Iránymenti és parciális deriváltak, Jacobi-mátrix. A gradiens. Érintősík. Lagrange-féle középértéktétel. A Lagrange-féle becslés leképezésekre. A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételei. Az inverz leképezés deriváltja, inverzfüggvénytétel. Az implicit leképezés tétele. Feltételes szélsőértékfeladat, Lagrange-féle multiplikátorszabály.  $n$ -szer differenciálható leképezések. A Young-tétel. A Taylor-formula. Lokális szélsőérték szükséges, ill. elégséges feltételei.

**7/8/10. hét, okt. 11 – nov. 7:** Jordan-mérték és többváltozós integrálszámítás. A Jordan-féle belső és külső mérték. A határ külső mértéke. Jordan-mérhető halmazok. A mérhetőség pontos feltétele. A konvex poliéderek és a normáltartományok mérhetősége. A paralelepipedonok térfogata. A Jordan-mérték egybevágóság-invarianciája. A többszörös integrál. Definíció, alaptulajdonságok, az integrálhatóság ekvivalens feltételei. Folytonos és korlátos függvények integrálhatósága. Egy halmaz mérhetőségének és karakterisztikus függvénye integrálhatóságának ekvivalenciája. Folytonos függvénnyel való kompozíció integrálhatósága. A lebontási tétel. A Cavalieri-elv. Normáltartományok térfogata. A gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció. Polárkoordinátás helyettesítés.

**11/12. hét, nov. 8–21:** Paraméteres integrálok. Paraméteres integrálok folytonossága, differenciálása és integrálása. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, differenciálása és integrálása. Elégséges feltétel az improprius paraméteres integrál egyenletes konvergenciájára. Gamma- és Béta-függvény.

**13/14/15. hét, nov. 22 – dec. 12.:** Valós vonalintegrálok és integráltételek. Görbék ívhossza. A vonalintegrál és kiszámítása. A Newton-Leibniz-formula. A primitív függvény létezésének feltételei. Vonalintegrál és homotópia. Gauss-féle összekapcsolódási szám. Divergencia és rotáció; integráltételek két és három dimenzióban. Maxwell-egyenletek.

# Emlékeztető az Analízis 3 előadásokról (2021. ősz)

## 1. előadás, 2021. szept. 7.

Euklideszi távolság  $\mathbb{R}^p$ -ben. Nyílt és zárt gömbök. Konvergens pontsorozatok. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart.  $a_n \rightarrow b$  akkor és csak akkor, ha minden  $i = 1, 2, \dots, p$  esetén  $a_{n,i} \rightarrow b_i$ . Linearitás. Cauchy-tulajdonság. Az  $(\mathbb{R}^p, |\cdot|)$  tér teljes. Korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

Normák. A  $\|\cdot\|_q$  ( $q \geq 1$ ) és  $\|\cdot\|_\infty$  normák.  $0 < q < 1$  esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség. Minkowski egyenlőtlenség.

## 2. előadás, 2021. szept. 8.

$1 \leq q \leq \infty$  esetén  $\|\cdot\|_q$  tényleg norma. Normák ekvivalenciája.  $\mathbb{R}^p$ -ben bármely  $\|\cdot\|$  norma ekvivalens az  $|\cdot|$  normával. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpéldák végtelen dimenziós esetben. [https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3\\_01\\_normak.pdf](https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf)

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja. Halmaz belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz. [LTS2, 13–19. o.]

## 3. előadás, 2021. szept. 14.

Halmaz lezártja. Cantor metszettétel. Kompakt halmaz definíciója. Borel tétel, bizonyítás Lindelöf-lemmával és Cantor metszettétellel. Kompakt és vele diszjunkt zárt halmaz távolsága pozitív. A hegymászós feladat, hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség.

## 4. előadás, 2021. szept. 15.

Bármely  $G \subset \mathbb{R}^p$  nyílt halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha nem bontható fel két diszjunkt, nemüres nyílt halmaz uniójára. Ha egy halmaz ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő. Van olyan halmaz, ami összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő.  $\mathbb{R}^p$  összefüggő. A teljes téren és az üres halmazon kívül nincs  $\mathbb{R}^p$ -nek olyan részhalmaza, ami egyszerre nyílt és zárt. Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor bármely két pontja összeköthető töröttvonallal. Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor ívszerűen összefüggő. Minden nyílt halmaz ívszerűen összefüggő komponensekre bontható. Tartomány.

$p$ -változós függvények. Véges és végtelen határértékek az értelmezési tartomány egy részhalmazára szorítkozva.  $\limsup, \liminf. \liminf_{a,A} f \leq \limsup_{a,A} f.$

## 5. előadás, 2021. szept. 21.

$\liminf_{a,A} f = \limsup_{a,A} f = \alpha$  akkor és csak akkor, ha  $\lim_{a,A} f = \alpha. \limsup_{a,A} f = \max\{\lim f(x_n : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \rightarrow a)\}.$  Átviteli elvek. Határátmenet limsupra és liminfre.

Többváltozós függvények folytonossága. Átviteli elv. Folytonosság részhalmazokon. Szekciófüggvények. Példa olyan függvényre, amelynek minden szekciófüggvénye folytonos, de a függvény nem folytonos. Műveletek. Az elemi függvények folytonossága. Weierstrass-tétel. [LTS2, 32–36. o.]

## 6. előadás, 2021. szept. 22.

Heine tétele.

Parciális differenciálhatóság. Példa parciálisan differenciálható, de nem folytonos függvényre. Lokális szélsőértékek. Szélsőértékkeresés a parciális deriváltak nullhelyeinek mekeresésével. Adott körbe írt maximális területű háromszög. [LTS2, 39–43. o.]

Lineáris függvény; átírás vektorok skaláris szorzatával és mátrixszorzással. Többváltozós függvény differenciálhatósága. A differenciálhatóságból következik a folytonosság. Érintősík. Egyértelműség. [LTS2, 45–47. o.]

## 7. előadás, 2021. szept. 28.

Deriváltvektor, gradiens. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Minden polinomfüggvény és minden racionális tört függvény, továbbá (ha elhagyjuk az ért. tartományok végpontait) minden elemi függvény differenciálható. [LTS2, 48–53. o.]

Íránymenti derivált. Az iránymenti derivált kiszámítása. Lagrange-közéértéktétel. Becslés a függvény megváltozására. Ha egy tartományod a derivált 0, akkor a függvény konstans. [LTS2, 53–56. o.]

## 8. előadás, 2021. szept. 29.

Vektorértékű függvények. Határérték, folytonosság, átviteli elvek. A határérték létezése és a folytonosság ekvivalens a koordinátafüggvények határértékével, ill. folytonosságával.  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  lineáris leképezések. Mátrix alak. Lineáris leképezés normája. Differenciálhatóság. A diff.hatóság ekvivalens azzal, hogy mindegyik koordinátafüggvény differenciálható. Ha differenciálható, akkor folytonos. A derivált egyértelműsége. Jacobi-mátrix. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Folytonos differenciálhatóság. Blokkmátrixok. [LTS2, 81–89. o.]

Differenciálási szabályok: konstansszoros, összeg. Láncszabály ( $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  és  $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$  függvény kompozíciója). [LTS2, 90–91. o.]

# I. Topológiai alapfogalmak $\mathbb{R}^p$ -ben

## 1. Ponsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$ -ben

Euklideszi távolság  $\mathbb{R}^p$ -ben. Nyílt és zárt gömbök. Konvergens ponsorozat. Ekvivalens átfogalmazások. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart.  $a_n \rightarrow b$  akkor és csak akkor, ha minden  $i = 1, 2, \dots, p$  esetén  $a_{n,i} \rightarrow b_i$ . Linearitás. Cauchy-tulajdonság. Az  $(\mathbb{R}^p, |\cdot|)$  tér teljes. Korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

### 1.1. Mese ( $p$ -dimenziós euklideszi tér)

- Pontok:  $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_p = \{(x_1, \dots, x_p) : x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}\}$ ;
- $\mathbb{R}$  fölötti vektortér
- Euklideszi norma:  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$ 
  - $|x| \geq 0$ , egyenlőség csak  $x = 0^p$  esetén
  - $|cx| = |c| \cdot |x|$
  - $|x + y| \leq |x| + |y|$ ; indukcióval akárhány tagra
- Euklideszi távolság:  $d(x, y) = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_p - x_p)^2}$
- Skaláris szorzat:  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p$ .

### 1.2. Definíció (nyílt és zárt gömbök)

Ha  $(H, d)$  metrikus tér, akkor az  $a \in H$  körüli,  $r > 0$  sugarú "nyílt" és "zárt" gömb:

$$B(a, r) = \{x \in H : d(x, a) < r\}, \quad \text{illetve} \quad \bar{B}(a, r) = \{x \in H : d(x, a) \leq r\}.$$

Az euklideszi térben

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| < r\}, \quad \bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| \leq r\}.$$

### 1.3. Definíció (ponsorozat limesze)

Legyen  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}^p$  és  $b \in \mathbb{R}^p$ . Az  $(a_n)$  ponsorozat limesze (limeszpontja)  $b$ , avagy az  $(a_n)$  ponsorozat  $b$ -hez tart, avagy  $a_n \rightarrow b$ , avagy  $\lim a_n = b$ , ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists n_0 \forall n > n_0 \\ \exists n_0 \forall n \geq n_0 \\ \text{elég nagy } n\text{-re} \\ \text{véges sok } n \text{ kivételével} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} d(a_n, b) < \varepsilon \\ |a_n - b| < \varepsilon \\ a_n \in B(b, \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

A ponsorozat konvergens, ha van limesze, illetve divergens, ha nincs.

#### 1.4. Tétel

Legyen

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2p} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Ezek ekvivalensek:

- (a)  $\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{b}$
- (b)  $|\mathbf{a}_n - \mathbf{b}| \rightarrow 0$
- (c) mindegyik  $1 \leq i \leq p$ -re  $a_{n,i} \rightarrow b_i$ .

#### 1.5. Tétel

- A limespont egyértelmű.
- Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát.
- Konvergens sorozat minden részsorozata is ugyanoda tart.
- Ha  $a_n \rightarrow A$  és  $b_n \rightarrow B$ , és  $c, d \in \mathbb{R}$ , akkor  $(ca_n + db_n) \rightarrow cA + dB$ .

#### 1.6. Definió (Cauchy-tulajdonság)

Legyen  $(a_n)$  pontsorozat valamely  $(H, d)$  metrikus térben. Az  $(a_n)$  sorozat "Cauchy-tulajdonságú", ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 \quad d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

#### 1.7. Trivialitás

Minden konvergens pontsorozat Cauchy-tulajdonságú.

**Bizonyítás.**  $(\Rightarrow)$ : legyen  $b = \lim a_n$ ;  $\forall \varepsilon > 0$ -ra  $d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b) + d(b, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  VSK.

#### 1.8. Tétel (Cauchy-kritérium)

$\mathbb{R}^p$ -ben bármely pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-tulajdonságú.

**Bizonyítás.**  $(\Leftarrow)$ :  $(a_n)$  Cauchy  $\Rightarrow (a_n)$  koordinátánként Cauchy  $\Rightarrow (a_n)$  koordinátánként konv  $\Rightarrow (a_n)$  konv

#### 1.9. Definió (teljes metrikus tér)

Egy metrikus tér "teljes", ha a térben minden Cauchy-sorozat konvergens.  
Pl. Az  $\mathbb{R}^p$  euklideszi tér teljes.

### 1.10. Definíció (korlátos halmaz)

Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$ . A  $H$  halmaz "korlátos", ha (ezek ekvivalensek):

- az  $\{|x| : x \in K\}$  számhalmaz korlátos, avagy  $\exists r \in \mathbb{R} \ H \subset B(0, r)$ ;
- minden  $1 \leq i \leq p$ -re az  $\{x_i : x \in K\}$  számsorozat korlátos.

### 1.11. Definíció (korlátos pontsorozat)

Legyen  $(a_n)$  pontsorozat  $\mathbb{R}^p$ -ben. Az  $(a_n)$  sorozat "korlátos", ha (ezek ekvivalensek):

- az  $\{a_1, a_2, \dots\}$  halmaz korlátos;
- az  $|a_n|$  számsorozat korlátos, avagy  $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall n \ |a_n| \leq K$
- minden  $1 \leq i \leq p$ -re az  $(a_{n,i})$  számsorozat korlátos

### 1.12. Tétel (Bolzano–Weierstrass tétel)

$\mathbb{R}^p$ -ben minden korlátos sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.

**Bizonyítás.** Az egydimenziós Bolzano–Weierstrass tételt alkalmazzuk  $p$ -szer.

## 2. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban

Norma, metrika, A  $\|\cdot\|_q$  ( $q \geq 1$ ) és  $\|\cdot\|_\infty$  normák. Hölder- és Minkowski egyenlőtlenség. Véges dimenzióban minden norma ekvivalens. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpélda végtelen dimenzióban. [KG1]

### 2.1. Definíció (norma)

Az  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  függvény "norma", ha

- Bármely  $x \in \mathbb{R}^p$  esetén  $\|x\| \geq 0$ ;
- $\|x\| = 0$  akkor és csak akkor, ha  $x = 0^p$ ;
- Bármely  $x \in \mathbb{R}^p$  vektor és  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$ ;
- Bármely  $x, y \in \mathbb{R}^p$  esetén  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

### 2.2. Definíció ( $L_q$ -norma)

$0 < q < \infty$  és  $x \in \mathbb{R}^p$  esetén legyen

$$\|x\|_q = (|x_1|^q + \dots + |x_p|^q)^{1/q},$$

továbbá legyen

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_p|).$$

Vegyük észre, hogy  $\|x\|_2 = |x|$  és  $\|x\|_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \|x\|_q$ .

### 2.3. Megjegyzés

Leggyakrabban az  $L_1$ ,  $L_2$  és az  $L_\infty$  normákat szoktuk használni.

### 2.4. Megjegyzés

$0 < q < 1$  esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség; pl. 2-dimenzióban

$$\|(1, 1)\|_q = 2^{1/q} > 2 = \|(1, 0)\|_q + \|(0, 1)\|_q.$$

### 2.5. Tétel (Hölder-egyenlőtlenség)

Ha  $1 \leq q, r \leq \infty$  és  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ , akkor tetszőleges  $a_1, \dots, a_p$  és  $b_1, \dots, b_p$  számokra

$$\|a\|_q \cdot \|b\|_r = (|a_1|^q + \dots + |a_p|^q)^{1/q} \cdot (|b_1|^r + \dots + |b_p|^r)^{1/r} \geq |a_1 b_1| + \dots + |a_p b_p|.$$

**Bizonyítás.** Ha  $a$  vagy  $b$  a nullvektor, akkor mindkét oldal 0, és kész.

Ha  $q = 1$  és  $r = \infty$ , akkor trivi:

$$B.O. = (|a_1| + \dots + |a_p|) \cdot \max |b_i| \geq J.O.$$

Marad az, ha  $1 < q, r < \infty$  és egyik vektor sem 0.

Az egyenlőtlenség homogén; az  $a$  és a  $b$  vektort is végigoszthatjuk egy-egy számmal, és ekvivalens állítást kapunk. Tehát feltételezhetjük, hogy  $\|a\|_q = 1$  és  $\|b\|_r = 1$ . Írjuk fel a súlyozott számtani-mértant az  $|a_i|^q$  és  $|b_i|^r$  számokra  $1/q$  és  $1/r$  súlyokkal:

$$|a_i b_i| = (|a_i|^q)^{1/q} (|b_i|^r)^{1/r} \leq \frac{1}{q} |a_i|^q + \frac{1}{r} |b_i|^r;$$

összegezve

$$\sum |a_i b_i| \leq \frac{1}{q} \sum |a_i|^q + \frac{1}{r} \sum |b_i|^r = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 = \|a\|_q \cdot \|b\|_r.$$

## 2.6. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség)

Ha  $1 \leq q \leq \infty$  és  $a, b \in \mathbb{R}^p$ , akkor

$$\|a + b\|_q \leq \|a\|_q + \|b\|_q.$$

**Bizonyítás.** Három speciális eset:

Ha  $q = \infty$ , akkor trivi:

$$\|a + b\|_\infty = \max |a_i + b_i| \leq \max (|a_i| + |b_i|) \leq \max |a_i| + \max |b_i| = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

Ha  $q = 1$ , akkor is trivi:

$$\|a + b\|_1 = \sum |a_i + b_i| \leq \sum (|a_i| + |b_i|) = \|a\|_1 + \|b\|_1.$$

Ha  $\|a + b\|_q = 0$ , akkor is trivi, mert

$$\|a + b\|_q = 0 \leq \|a\|_q + \|b\|_q.$$

Az általános esetben  $1 < q < \infty$  és  $a + b \neq 0$ . Legyen  $r = \frac{q}{q-1}$  a  $q$  konjugált kitevőpárja, amelyre  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ .

$$\begin{aligned} \|a + b\|_q^q &= \sum |a_i + b_i|^q = \sum (|a_i + b_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}}) \leq \sum |a_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}} + \sum |b_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}} \stackrel{\text{Hölder } 2 \times}{\leq} \\ &\leq \left( \sum |a_i|^q \right)^{1/q} \left( \sum |a_i + b_i|^q \right)^{1/r} + \left( \sum |b_i|^q \right)^{1/q} \left( \sum |a_i + b_i|^q \right)^{1/r} = (\|a\|_q + \|b\|_q) \cdot \|a + b\|_q^{q-1}. \end{aligned}$$

Végül leosztunk.

## 2.7. Következmény

$\|\cdot\|_q$  norma minden  $1 \leq q \leq \infty$  esetén.

## 2.8. Definíció

Az  $\|\cdot\|$  és  $\|\cdot\|'$  normák ekvivalensek, ha léteznek olyan  $c_1, c_2 > 0$  számok, hogy bármely  $x \in \mathbb{R}^p$  vektorra

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\|.$$

## 2.9. Példa

Az  $|\cdot|$ ,  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  normák ekvivalensek, mert

$$\frac{1}{\sqrt{p}} |x| \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p} \cdot |x|$$



## 2.10. Tétel (a normák ekvivalenciája)

$\mathbb{R}^p$ -ben bármely  $\|\cdot\|$  norma ekvivalens az  $|\cdot|$  normával, azaz léteznek olyan  $c_1, c_2 > 0$  számok, hogy bármely  $x \in \mathbb{R}^p$  vektorra

$$c_1|x| \leq \|x\| \leq c_2|x|.$$

**Bizonyítás.** A felső becslés: legyenek a koordináta-egységvektorok  $e_1, \dots, e_p$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x_1e_1 + \dots + x_pe_p\| \leq \|x_1e_1\| + \dots + \|x_pe_p\| = |x_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |x_p| \cdot \|e_p\| \leq \\ &\leq |x| \cdot \|e_1\| + \dots + |x| \cdot \|e_p\| = (\|e_1\| + \dots + \|e_p\|) \cdot |x|, \end{aligned}$$

Tehát például  $c_2 = \|e_1\| + \dots + \|e_p\|$  megfelelő.

Az alsó becsléshez tegyük fel indirekt, hogy nincs ilyen  $c_1$ . Ezek szerint minden pozitív egészre  $c_1 = \frac{1}{n}$  nem jó, vagyis van olyan  $x_n$  vektor, amelyre  $\|x_n\| < \frac{1}{n}|x_n|$ . Az  $x_n$  nem lehet a nullvektor, és így a skálázhatóság miatt feltehetjük, hogy  $|x_n| = 1$ .

Az Bolzano-Weierstrass tétel miatt a korlátos  $(x_n)$  sorozatnak van egy konvergens  $(x_{n_k})$  részsorozata. Ennek limeszpontja legyen  $y$ . A részsorozat koordinátáinként  $y$ -hez tart; az abszolútérték definíciója miatt

$$|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^p |y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k, i}\right)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^p x_{n_k, i}^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k}| = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

A részsorozatban  $|x_{n_k} - y| \rightarrow 0$ . A már bizonyított felső becslés szerint  $0 \leq \|x_{n_k} - y\| \leq c_2|x_{n_k} - y|$ ; a rendőr-elv miatt  $\|x_{n_k} - y\| \rightarrow 0$ . Ezek után

$$0 < \|y\| \leq \|x_{n_k}\| + \|y - x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} + c_2|y - x_{n_k}| \rightarrow 0,$$

ellentmondás.

## 2.11. Következmény

Véges dimenzióban a pontsorozatok konvergenciája nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Bármelyik normát is használjuk, ugyanazok a sorozatok lesznek konvergenssek.

## 2.12. Példa

Végtelen dimenzióban a különböző normák nem feltétlenül ekvivalensek.

- Legyen  $C[0, 1]$  a  $[0, 1]$  intervallumon folytonos függvények vektortere. Ezen a téren két lehetséges norma  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$  és  $\|f\|_\infty = \max |f|$ .

Vizsgáljuk az  $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & x < 1/n \\ 0 & x \geq 1/n \end{cases}$  függvényeket. Ezekre  $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$  és  $\|f_n\|_\infty = 1$ .

Az  $L_1$  norma szerint az  $(f_n)$  sorozat a konstans 0 függvényhez tart, az  $L_\infty$  norma szerint nem tart oda, és nem is Cauchy-sorozat.

- Ugyanezen a téren  $\|f\|_2 = \int_0^1 x|f(x)| dx$  és  $\|f\|_3 = \int_0^1 (1-x)|f(x)| dx$  két olyan norma, amelyeknek az aránya sem alulról, sem felülről nem korlátos.

### 3. Nyílt és zárt halmazok

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja. Halmaz belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz, halmaz lezártja. [LTS2, 13–19. o.]

#### 3.1. Definíció

- Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja.
- Halmaz belseje, külseje, határa.
- Nyílt halmaz, zárt halmaz, halmaz lezártja.
- Torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz.

#### 3.2. Példa

- Az egész tér egyszerre nyílt és zárt is.
- Az üres halmaz egyszerre nyílt és zárt is.
- A nyílt gömbök nyílt halmazok.
- A zárt gömbök zárt halmazok.
- Az  $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_p, b_p)$  nyílt téglák nyílt halmazok.
- Az  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$  zárt téglák zárt halmazok.

#### 3.3. Tétel

- Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha az elemeiből képzett konvergens sorozatok limeszei is elemei.
- Bármely halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementuma zárt.
- Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nyílt.
- Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
- Zárt halmazok tetszőleges rendszerének metszete zárt.
- Véges sok zárt halmaz uniója zárt.

#### 3.4. Példa

- A  $B(0, 1/n)$  nyílt gömbök metszete nem nyílt.
- A  $\bar{B}(0, 1 - 1/n)$  zárt gömbök uniója nem zárt.

#### 3.5. Definíció

Legyen  $G \subset \mathbb{R}^p$  nyílt. Egy  $S \subset G$  halmaz "sűrű"  $G$ -ben, ha

$$\forall a \in G \quad \forall r > 0 \quad S \cap B(a, r) \neq \emptyset.$$

### 3.6. Példa

$\mathbb{Q}^p$  és  $\mathbb{R}^p \setminus \mathbb{Q}^p$  sűrű.

### 3.7. Tétel

A belső/külső pont, nyílt halmaz stb. fogalmak nem függenek attól, hogy melyik normát használjuk.

## 4. Kompakt halmazok

Cantor-metszettétel. Kompakt halmazok. Racionális gömbök, Lindelöf-lemma, Borel tétele. Nemüres kompakt és vele diszjunkt nemüres zárt halmaz távolsága pozitív. [LTS2, 18, 21–24. o.]

### 4.1. Tétel (Cantor metszettétel)

Ha  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$  korlátos, zárt, nemüres halmazok, akkor  $\bigcap K_n \neq \emptyset$ .

### 4.2. Példa

A  $A_n = \{\mathbf{x} : x_1 \geq n\}$  zárt félterek zártak és nemüresek,  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , de a metszetük üres.  
A  $B_n = B(1/n, 1/n)$  gömbök korlátosak és nemüresek,  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ , de a metszetük üres.

### 4.3. Definíció (kompaktság)

Egy  $K \subset \mathbb{R}^p$  halmaz "kompakt", ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

### 4.4. Definíció (racionális gömb)

$B(a, r)$  "racionális gömb", ha  $a \in \mathbb{Q}^p$  és  $r \in \mathbb{Q}$ .

### 4.5. Tétel

Minden nyílt halmaz előáll racionális gömbök uniójaként.

### 4.6. Lemma (Lindelöf)

Nyílt halmazok tetszőleges  $G_i$  ( $i \in I$ ) rendszeréből kiválasztható egy megszámlálható részrendszer, amelynek uniója ugyanaz, vagyis létezik olyan megszámlálható  $J \subset I$  indexhalmaz, hogy

$$\bigcup_{i \in J} G_i = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

### 4.7. Tétel (Borel)

$K \subset \mathbb{R}^p$  akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

### 4.8. Definíció

Ha  $A, B \subset \mathbb{R}^p$  nemüres halmazok, akkor ezek távolsága

$$\text{dist}(A, B) = \inf \{|a - b| : a \in A, b \in B\}.$$

### 4.9. Tétel

Tegyen  $K \subset \mathbb{R}^p$  kompakt és  $Z \subset \mathbb{R}^p$  zárt, egyik sem üres.

- (a) Léteznek olyan  $a \in K$  és  $b \in Z$  pontok, amelyekre  $|a - b| = \text{dist}(K, Z)$ .
- (b) Ha  $K$  és  $Z$  diszjunkt, akkor  $\text{dist}(K, Z) > 0$ .

## 5. Összefüggő halmazok

Hegymászós feladat; hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő. Példa összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő halmazra.  $\mathbb{R}^p$  összefüggő.  $\mathbb{R}^p$ -ben az üres halmazon és az egész téren kívül nincs más halmaz, amely egyszerre nyílt és zárt is. [LTS2, 19–21. o.]

### 5.1. Kérdés (hegymászós feladat)

Két hegymászó az  $y = h(x)$  grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  folytonos függvény, és  $h(0) = h(1) = 0$ . Az egyik hegymászó a  $(0, 0)$ , a másik az  $(1, 0)$  pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni, hogy mászás közben minden pillanatban azonos magasságban vannak. Sikerülhet-e ez nekik?

(Avagy: léteznek-e biztosan olyan  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  folytonos függvények, amelyekre  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 1$ ,  $f(1) = g(1)$ , és minden  $t \in [0, 1]$  pillanatban  $h(f(t)) = h(g(t))$ ?)

Hibás bizonyítás arra, hogy a válasz igen.

Példa arra, hogy a válasz nem.

### 5.2. Definíció (ívszerű összefüggőség)

A  $H \subset \mathbb{R}^p$  halmaz ívszerűen összefüggő, ha bármelyik két pontja összeköthető a halmazban folytonos görbével, tehát bármely  $a, b \in H$  pontokhoz van olyan  $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$  folytonos görbe, amelyre  $\gamma(0) = a$  és  $\gamma(1) = b$ .

### 5.3. Definíció (összefüggőség)

A  $H \subset \mathbb{R}^p$  halmaz összefüggő, ha

- $H$  nem bontható fel két diszjunkt, nemüres, relatív nyílt halmaz uniójára, vagyis
- Ha  $A, B \subset \mathbb{R}^p$  nyílt halmazok,  $H \subset A \cup B$  és  $H \cap A \cap B = \emptyset$ , akkor  $H \subset A$  vagy  $H \subset B$ .

### 5.4. Megjegyzés

Bármely  $G \subset \mathbb{R}^p$  nyílt halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha nem bontható fel két diszjunkt, nemüres nyílt halmaz uniójára, avagy

### 5.5. Tétel

Ha egy halmaz ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

### 5.6. Példa

Van olyan halmaz, ami összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő.

### 5.7. Következmény

$\mathbb{R}^p$  összefüggő.

### 5.8. Következmény

A teljes téren és az üres halmazon kívül nincs  $\mathbb{R}^p$ -nek olyan részhalmaza, ami egyszerre nyílt és zárt.

### 5.9. Tétel

- Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor bármely két pontja összeköthető töröttvonalal.
- Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor ívszerűen összefüggő.
- Minden nyílt halmaz ívszerűen összefüggő komponensekre bontható.

### 5.10. Definíció

Tartomány: nem üres, nyílt, összefüggő halmaz

# II. Többváltozós függvények differenciál- számítása

## 6. Többváltozós függvények folytonossága és határértéke

### 6.1. Többváltozós függvények határértéke

$\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  függvények véges és végtelen határértéke valamilyen halmazra szorítkozva. A határérték egyértelmű. Átviteli elv. Példák. [LTS2, 28–31. o.]

#### 6.1. Definíció ( $p$ -változós függvény)

$f : H \rightarrow \mathbb{R}$  egy  $p$ -változós függvény, ha  $H \subset \mathbb{R}^p$ .

#### 6.2. Definíció ( $p$ -változós függvény határértéke)

Legyen  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$   $p$ -változós függvény,  $A \subset H$ ,  $a \in A'$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Az  $f$  függvény határértéke az  $a$  pontban az  $A$  halmazra szorítkozva  $b$ , ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

avagy, a  $b$  bármely  $V$  környezetéhez létezik az  $a$ -nak olyan  $\dot{U}$  pontozott környezete, hogy  $f(\dot{U} \cap A) \subset V$ .

Jele:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b, \quad \lim_{a, A} f = b$$

Ha  $A$  az értelmezési tartomány, akkor nem tesszük hozzá, hogy "az  $A$  halmazra szorítkozva".

#### 6.3. Definíció ( $p$ -változós függvény végtelen határértéke)

Legyen  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$   $p$ -változós függvény,  $A \subset H$ ,  $a \in A'$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Az  $f$  függvény határértéke az  $a$  pontban az  $A$  halmazra szorítkozva  $\infty$ , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad f(x) > K$$

avagy, a  $\infty$  bármely  $V$  környezetéhez létezik az  $a$ -nak olyan  $\dot{U}$  pontozott környezete, hogy  $f(\dot{U} \cap A) \subset V$ .

Jele:  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \infty, \lim_{a, A} f = \infty$ .

Az  $f$  függvény határértéke az  $a$  pontban az  $A$  halmazra szorítkozva  $-\infty$ , ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a, \delta) \cap A \quad f(x) < K$$

avagy, a  $-\infty$  bármely  $V$  környezetéhez létezik az  $a$ -nak olyan  $\dot{U}$  pontozott környezete, hogy  $f(\dot{U} \cap A) \subset V$ .

Jele:  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = -\infty, \lim_{a, A} f = -\infty$ .

## 6.4. Példa

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

## 6.2. Többváltozós függvények alsó és felső határértéke

Függvény limesz superiora és limesz inferiora.  $\liminf_{a,A} f = \limsup_{a,A} f = \alpha$  akkor és csak akkor, ha  $\lim_{a,A} f = \alpha$ .  $\limsup_{a,A} f = \max\{\lim f(x_n) : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \rightarrow a\}$ . Átviteli elvek. Határátmenet  $\limsup$ -ra és  $\liminf$ -re. [KG2]

## 6.5. Definíció

Legyen  $A \subset \mathbb{R}^p$ ,  $a$  az  $A$  halmaz torlódási pontja, és  $f$  olyan  $p$ -változós, valós értékű függvény, ami valamilyen  $r > 0$  esetén értelmes a  $\dot{B}(a, r_0) \cap A$  halmazon.

Az  $f$  függvény *felső határértéke* avagy *limesz superiora* az  $a$  pontban, az  $A$  halmazra szorítkozva

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow a \\ a \in A}} f(x) = \overline{\lim}_{a,A} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0+} \sup f(\dot{B}(a, r) \cap A) = \inf_{r > 0} \sup f(\dot{B}(a, r) \cap A).$$

Megjegyzés. A  $\dot{B}(a, r) \cap A$  biztosan nem üres, mert  $a$  torlódási pont. Nagyobb  $r$ -hez bővebb  $\dot{B}(a, r) \cap A$  és  $f(\dot{B}(a, r) \cap A)$  halmazt kapunk, ezért az  $r \mapsto \sup f(\dot{B}(a, r) \cap A)$  függvény (nem szig.) monoton növekvő. Az értéke (a szupremum)  $+\infty$  is lehet, de ettől még tudunk határértéket venni. A monotonitás miatt a határérték egyenlő az infimummal.

Az  $f$  függvény *alsó határértéke* avagy *limesz inferiora* az  $a$  pontban, az  $A$  halmazra szorítkozva

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow a \\ a \in A}} f(x) = \underline{\lim}_{a,A} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0+} \inf f(\dot{B}(a, r) \cap A) = \sup_{r > 0} \inf f(\dot{B}(a, r) \cap A).$$

## 6.6. Lemma

- 1a. Ha  $\limsup_{a,A} f > \alpha$ , akkor  $\forall r > 0 \exists x \in \dot{B}(a, r) f(x) > \alpha$ .
- 1b. Ha  $\limsup_{a,A} f < \beta$ , akkor  $\exists r > 0 \forall x \in \dot{B}(a, r) f(x) < \beta$ .
- 2a. Ha  $\liminf_{a,A} f > \alpha$ , akkor  $\exists r > 0 \forall x \in \dot{B}(a, r) f(x) > \alpha$ .
- 2b. Ha  $\liminf_{a,A} f < \beta$ , akkor  $\forall r > 0 \exists x \in \dot{B}(a, r) f(x) < \beta$ .

**Bizonyítás.** 1a:  $\inf_r \sup f(\dot{B}(a) \cap A) > \alpha$ , tehát bármely  $r > 0$  esetén  $\sup f(\dot{B}(a) \cap A) > \alpha$ .

1b:  $\inf_r \sup f(\dot{B}(a) \cap A) < \beta$ , tehát van olyan  $r > 0$ , amire  $\sup f(\dot{B}(a) \cap A) < \beta$ .

2a, 2b ugyanúgy.



## 6.7. Tétel

$\liminf_{a,A} f \leq \limsup_{a,A} f$ , és

$\liminf_{a,A} f = \limsup_{a,A} f = \alpha$  akkor és csak akkor, ha  $\lim_{a,A} f = \alpha$ .

Az  $\alpha = \pm\infty$  eseteket úgy is lehet írni hogy

- $\lim_{a,A} f = +\infty$  akkor és csak akkor, ha  $\liminf_{a,A} f = +\infty$ ;
- $\lim_{a,A} f = -\infty$  akkor és csak akkor, ha  $\limsup_{a,A} f = -\infty$ .

**Bizonyítás.** Az első állítás trivi az 6.5.. definícióból:  $\inf f(\dot{B}(a,r) \cap A) \leq \sup f(\dot{B}(a,r) \cap A)$ , majd  $r \rightarrow 0+$  határátmenet.

1. eset:  $\alpha = -\infty$ . A 6.6.. lemma miatt ha  $\limsup_{a,A} f = -\infty$ , akkor minden  $K$  számhoz van olyan  $r > 0$ , hogy  $x \in \dot{B}(a,r) \cap A$  esetén  $f(x) < K$ . Ez pedig éppen annak definíciója, hogy  $\lim_{a,A} f = -\infty$ .

Megfordítva, ha  $\lim_{a,A} f = -\infty$ , akkor minden  $K$  számhoz van olyan  $r > 0$ , hogy  $x \in \dot{B}(a,r) \cap A$  esetén  $f(x) < K$ . Ekkor viszont  $\limsup_{a,A} f \leq \sup f(\dot{B}(a,r) \cap A) \leq K$ . Ez minden  $K$  számra igaz, tehát  $\limsup_{a,A} f = -\infty$ .

2. eset:  $\alpha = +\infty$ . ugyanúgy, mint az 1. esetben.

3. eset:  $\alpha$  véges.

Ha  $\liminf_{a,A} f = \limsup_{a,A} f = \alpha$ , akkor a 6.6.. lemma miatt minden  $0 < \varepsilon < \alpha$ -hoz van olyan  $r_1$  és  $r_2$ , hogy bármely  $x \in \dot{B}(a,r_1) \cap A$  esetén  $f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$ , illetve bármely  $x \in \dot{B}(a,r_2) \cap A$  esetén  $f(x) < \alpha + \varepsilon < 0$ . Vegyük a két sugár közül a kisebbet: legyen  $\delta = \min(r_1, r_2)$ . Ekkor tehát bármely  $x \in \dot{B}(a,\delta) \cap A$  esetén  $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$ ; ez viszont éppen annak a definíciója, hogy  $\lim_{a,A} f = \alpha$ .

Megfordítva, ha  $\lim_{a,A} f = \alpha$ , akkor bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $\delta > 0$ , hogy  $x \in \dot{B}(a,\delta) \cap A$  esetén  $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$ ; ekkor viszont

$$\alpha - \varepsilon \leq \inf f(\dot{B}(a,\delta)) \leq \liminf_{a,A} f \leq \limsup_{a,A} f \leq \sup f(\dot{B}(a,\delta)) \leq \alpha + \varepsilon.$$

Tehát

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \alpha - \varepsilon \leq \liminf_{a,A} f \leq \limsup_{a,A} f \leq \alpha + \varepsilon.$$

## 6.8. Tétel

Legyen

$$L = \{ \lim f(x_n) : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \rightarrow a \} \subset [-\infty, +\infty].$$

Ekkor  $\limsup_{\substack{x \rightarrow a \\ a \in A}} f(x) = \max L$  és  $\liminf_{\substack{x \rightarrow a \\ a \in A}} f(x) = \min L$ .

**Bizonyítás.** Elég a lim sup-ra.

Először azt igazoljuk, hogy  $\limsup_{a,A} f \in L$ .

1. eset:  $\limsup_{a,A} f = b$  véges. Minden pozitív egész  $n$ -hez vegyünk egy olyan  $x_n$  pontot, amelyre  $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$  és  $b - \frac{1}{n} < f(x_n) < b + \frac{1}{n}$ . Ilyen létezik, mert a 6.6.. Lemma 1b miatt minden elég

közeli pontban  $f(x_n) < b + \frac{1}{n}$ , és a 6.6.. Lemma 1a miatt az elég közelieliek között van olyan pont, amelyre  $f(x_n) > b - \frac{1}{n}$  is igaz. A rendőr-elv miatt  $f(x_n) \rightarrow b$ , így  $b \in L$ .

2. eset:  $\limsup_{a,A} f = +\infty$ . Minden pozitív egész  $n$ -hez vegyünk egy olyan  $x_n$  pontot, amelyre  $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$  és  $f(x_n) > n$ .

3. eset:  $\limsup_{a,A} f = -\infty$ . Minden pozitív egész  $n$ -hez vegyünk egy olyan  $x_n$  pontot, amelyre  $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$  és  $f(x_n) < -n$ .

Másodszor, az kell, hogy  $L$ -nek nincs  $\limsup_{a,A} f$ -nél nagyobb eleme. Tegyük fel indirekt, hogy mégis van egy  $\beta \in L$ , amire  $\beta > \limsup_{a,A} f$ . A  $\beta$ -hoz van egy  $x_n \in A$  sorozat, amely  $a$ -hoz tart,  $x_n \neq a$  és  $f(x_n) \rightarrow \beta$ . Vegyünk még egy  $c$  számot, amire  $\limsup_{a,A} f < c < \beta$ . A lemma 1b szerint van olyan  $r > 0$ , hogy  $x \in \dot{B}(a, r) \cap A$  esetén  $f(x) < c$ . Mivel  $x_n \rightarrow a$ , véges sok kivétellel minden  $x_n$  ilyen. Tehát véges sok kivétellel  $f(x_n) < c$ , de ez ellentmond annak, hogy  $f(x_n)$  a  $c$ -nél nagyobb  $\beta$ -hoz tart.

### 6.9. Következmény (átviteli elv)

$\lim_{a,A} f = \alpha$  akkor és csak akkor, ha bármely  $x_n \in A \setminus \{a\}$  sorozatra, ha  $x_n \rightarrow a$ , akkor  $f(x_n) \rightarrow \alpha$ .

### 6.10. Tétel

Műveletek...

### 6.11. Tétel (határátmenet)

Ha valamilyen  $r > 0$ -re  $x \in \dot{B}(a, r) \cap A$  esetén  $f(x) \leq g(x)$ , akkor  $\liminf_{a,A} f \leq \liminf_{a,A} g$ , és  $\limsup_{a,A} f \leq \limsup_{a,A} g$ .

**Bizonyítás.** Az 6.5.. definícióból triviális.

### 6.12. Következmény (rendőr- és honvéd/csősz-elvek)

(a) Ha a  $\dot{B}(a, r) \cap A$  halmazon  $f \leq g \leq h$  és  $\lim_{a,A} f = \lim_{a,A} h = c$ , akkor  $\lim_{a,A} g = c$ .

(b) Ha a  $\dot{B}(a, r) \cap A$  halmazon  $f \leq g$  és  $\lim_{a,A} f = \infty$ , akkor  $\lim_{a,A} g = \infty$ .

(c) Ha a  $\dot{B}(a, r) \cap A$  halmazon  $f \leq g$  és  $\lim_{a,A} g = -\infty$ , akkor  $\lim_{a,A} f = -\infty$ .

## 7. Többváltozós függvények folytonossága

Többváltozós függvények folytonossága. Átviteli elv. Folytonos függvény folytonossága részhalmazokon. Szekciófüggvények. Példa olyan függvényre, amelynek minden szekciófüggvénye folytonos, de a függvény nem folytonos. Műveletek. Az elemi függvények folytonossága. Weierstrass-tétel. Heine-tétel. [LTS2, 32–36. o.]

## 8. Parciális deriváltak

Parciális differenciálhatóság. Példa parciálisan differenciálható, de nem folytonos függvényre. Lokális szélsőértékek. Szélsőértékkeresés a parciális deriváltak nullhelyeinek mekeresésével. Adott körbe írt maximális területű háromszög. [LTS2, 39–43. o.]

## 9. Többváltozós függvények differenciálása

Lineáris függvény; átírás vektorok skaláris szorzatával és mátrixszorzással. Többváltozós függvény differenciálhatósága. A differenciálhatóságból következik a folytonosság. Érintősík. Egyértelműség. Deriváltvektor, gradiens. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Minden polinomfüggvény és minden racionális tört függvény, továbbá (ha elhagyjuk az ért. tartományok végpontait) minden elemi függvény differenciálható. [LTS2, 45–53. o.]

## 10. Iránymenti deriváltak. Lagrange-középértéktétel

Iránymenti derivált. Az iránymenti derivált kiszámítása. Lagrange-középértéktétel. Becslés a függvény megváltozására. Ha egy tartományod a derivált 0, akkor a függvény konstans. [LTS2, 53–56. o.]

## 11. Vektorértékű függvények differenciálása

Vektorértékű függvények. Határérték, folytonosság, átviteli elvek. A határérték létezése és a folytonosság ekvivalens a koordinátafüggvények határértékével, ill. folytonosságával.  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  lineáris leképezések. Mátrix alak. Lineáris leképezés normája. Differenciálhatóság. A diff.hatóság ekvivalens azzal, hogy mindegyik koordinátafüggvény differenciálható. Ha differenciálható, akkor folytonos. A derivált egyértelműsége. Jacobi-mátrix. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Folytonos differenciálhatóság. Blokkmátrixok. [LTS2, 81–89. o.]

### 11.1. Definíció (Lineáris $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ leképezések)

$$A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x + y) = A(x) + A(y)$$

### 11.2. Tétel

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}}_{q \times p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

### 11.3. Definíció (Lineáris leképezés vagy mátrix normája)

$$\|A\| = \sup \left\{ |Ax| : |x| = 1 \right\} = \max \left\{ |Ax| : |x| = 1 \right\}$$

### 11.4. Trivialitás

Tetsz.  $x$  vektorra  $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$ .

## 11.5. Tétel

A mátrixnorma tényleg norma:

- $\|A\| \geq 0$ , és  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

**Bizonyítás.** Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely  $x \in \mathbb{R}^p$  egységvektorra

$$|(A + B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|$$

Tehát

$$\|A + B\| = \sup \left\{ |(A + B)x| : |x| = 1 \right\} \leq \|A\| + \|B\|.$$

A  $\text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  tér a mátrixnormával egy normált lineáris tér.

(Igazából bármelyik normát használhatnánk, csak ezzel könnyű lesz számolni.)

## 11.6. Definíció (differenciálhatóság)

$H \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ ;  $a \in \text{int } H$ .

Az  $f$  függvény **differenciálható** az  $a$  pontban, ha van olyan  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  lineáris leképezés, amelyre

(a) 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0_q$$

(b) Valamilyen vektorértékű  $\varepsilon(x)$  függvénnyel

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \varepsilon(x)|x - a|, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0_q$$

(c) Valamilyen vektorértékű  $\varepsilon(x)$  függvénnyel

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \varepsilon(x)|x - a|, \quad \varepsilon \text{ folytonos } a\text{-ban és } \varepsilon(a) = 0_q$$

Soronként írva,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + \ell_1(x - a) + \varepsilon_1(x) \cdot |x - a| \\ f_2(a) + \ell_2(x - a) + \varepsilon_2(x) \cdot |x - a| \\ \vdots \\ f_q(a) + \ell_q(x - a) + \varepsilon_q(x) \cdot |x - a| \end{pmatrix}$$

$f$  differenciálható

$\Leftrightarrow$  az  $\varepsilon$  vektorfüggvény folytonos  $a$ -ban és  $\varepsilon(a) = 0_q$

$\Leftrightarrow$  mindegyik  $\varepsilon_j$  függvény folytonos  $a$ -ban és  $\varepsilon_j(a) = 0$

$\Leftrightarrow$  mindegyik  $f_j$  differenciálható, és a deriváltja az  $\ell_j$  lineáris függvény.

A számértékű függvényeknél láttuk, hogy az  $\ell_j(x)$  lineáris függvény egyértelmű, és az együttthatói (ha tetszik, koordinátái) az  $f_j$  függvény parciális deriváltjai az  $a$  pontban:

$$\ell_j(x) = D_1 f_j(a) \cdot x_1 + D_2 f_j(a) \cdot x_2 + \cdots + D_p f_j(a) \cdot x_p.$$

Ezek után az  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_q(a) \end{pmatrix}$$

### 11.7. Definíció (Jacobi-mátrix)

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_q(a) \end{pmatrix}$$

Neve: az  $f$  leképezés  $a$  pontbeli Jacobi-mátrixa; jele  $Jf(a)$ .

### 11.8. Definíció

A most már egyértelmű  $A(x)$  leképezést hívjuk az  $f$  leképezés  $a$ -beli deriváltjának, és jelölhetjük így:  $f'(a) = A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ .

### 11.9. Mese

A definícióba beírva ezt a jelölést,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Ezek után a  $p$ -változós  $f'$  derivált leképezés hova is képez? Hát a  $p \cdot q$  dimenziós  $\text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  vektortérbe...

Ha valaki szereti a vektor magicet, a Jacobi-mátrixot ilyen vicces szorzat alakokban is írhatja:

$$\begin{pmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_q(a) \end{pmatrix} = \text{grad} \cdot \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{pmatrix} (D_1 \quad D_2 \quad \dots \quad D_p)$$

### 11.10. Tétel

Ha az  $f$  függvény differenciálható az  $a$  pontban, akkor  $f$  folytonos  $a$ -ban.

### 11.11. Tétel

Ha az  $f$  függvény differenciálható az  $a$  pontban, akkor  $f$  mindegyik  $f_j$  koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és véges az  $a$  pontban.

### 11.12. Tétel

Ha az  $a$  pont egy környezetében az  $f$  mindegyik  $f_j$  koordinátafüggvénye parciálisan differenciálható, és mindegyik  $D_i f_j$  parciális derivált folytonos az  $a$  pontban, akkor  $f$  differenciálható  $a$ -ban.

### 11.13. Definíció

Ha az  $a$  pont egy környezetében az  $f$  minden pontban differenciálható, és mindegyik  $D_i f_j$  parciális derivált folytonos az  $a$  pontban, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  **folytonosan differenciálható** az  $a$  pontban.

Avagy, a  $q \times p$ -es mátrix értékű deriváltfüggvény akkor és csak akkor folyt.  $a$ -ban, ha minden koordinátafüggvénye, vagyis az összes  $D_i f_j(x)$  folyt.  $a$ -ban.

### 11.14. Példa

Legyen  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ , pontosabban

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

A parciális deriváltak:

$$D_x f_1(x, y) = e^x \cos y; \quad D_y f_1(x, y) = -e^x \sin y;$$

$$D_x f_2(x, y) = e^x \sin y; \quad D_y f_2(x, y) = e^x \cos y.$$

A Jacobi-mátrix az  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  pontban

$$Jf \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.$$

A függvény deriváltja az  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  pontban az

$$f' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^a \cos b \cdot x - e^a \sin b \cdot y \\ e^a \sin b \cdot x + e^a \cos b \cdot y \end{pmatrix}$$

lineáris leképezés.

### 11.15. Mese (E)

a differenciálhatóságfogalom közös általánosítása a korábbi deriváltfogalmaknak:

$f :$	$\rightarrow \mathbb{R}$	$\rightarrow \mathbb{R}^q$
$\mathbb{R} \rightarrow$	Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény: $f'(x)$ egy szám (meredekség) vagy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy $1 \times 1$ -es mátrix	Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ görbe: $f'(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_q(t) \end{pmatrix}$ (érintő)vektor; $q$ - dim. (oszlop)vektor ha tetszik, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ lin. fv
$\mathbb{R}^p \rightarrow$	Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ függvény: $f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy $(D_1f(a) \ \dots \ D_pf(a))$ , $p$ -dim. (gradiens)vektor vagy $p$ -dim. sorvektor	Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ leképezés: $f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ lineáris fv vagy $\begin{pmatrix} D_1f_1(a) & \dots & D_pf_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1f_q(a) & \dots & D_pf_q(a) \end{pmatrix} q \times$ $p$ -es mátrix

### 11.16. Mese (Blokkmátrixok, parciális deriváltak)

$$J \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x, y) = J \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_p \mid y_1, \dots, y_q) =$$

$$= \left( \begin{array}{ccc|ccc} D_{x_1}f_1 & \dots & D_{x_p}f_1 & D_{y_1}f_1 & \dots & D_{y_q}f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}f_r & \dots & D_{x_p}f_r & D_{y_1}f_r & \dots & D_{y_q}f_r \\ \hline D_{x_1}g_1 & \dots & D_{x_p}g_1 & D_{y_1}g_1 & \dots & D_{y_q}g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}g_s & \dots & D_{x_p}g_s & D_{y_1}g_s & \dots & D_{y_q}g_s \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} D_x f & D_y f \\ \hline D_x g & D_y g \end{array} \right)$$

## 12. Differenciálási szabályok

Differenciálási szabályok: konstansszoros, összeg. Láncszabály ( $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  és  $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$  függvény kompozíciója).

## 12.1. Trivialitás

Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ ;  $a \in \text{int } H$ . Ha  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  differenciálható az  $a$  pontban és  $c \in \mathbb{R}$ , akkor  $c \cdot f$  is differenciálható  $a$ -ban, és

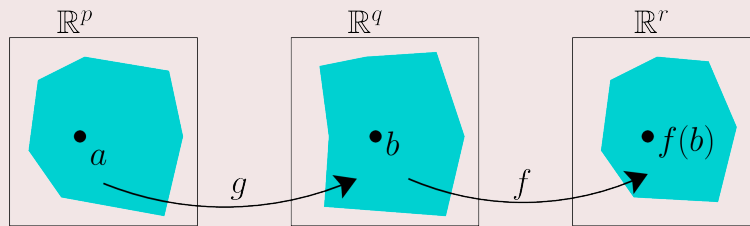
$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

**Trivi.** Ha  $f, g : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  differenciálható az  $a$  pontban, akkor  $f + g$  is differenciálható  $a$ -ban, és

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(Trivi az  $\varepsilon$  függvények folytonosságából.)

## 12.2. Tétel (láncszabály)



Legyen a  $p$ -változós,  $\mathbb{R}^q$ -ba képező  $g$  függvény differenciálható az  $a \in \mathbb{R}^p$  pontban és  $g(a) = b \in \mathbb{R}^q$ . Továbbá legyen a  $q$ -változós,  $\mathbb{R}^r$ -be képező  $f$  függvény differenciálható a  $b$  pontban. Ekkor a  $p$ -változós,  $\mathbb{R}^r$ -be képező  $f \circ g$  függvény is differenciálható az  $a$  pontban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \circ g'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a).$$

Avagy Jacobi-mátrixokkal

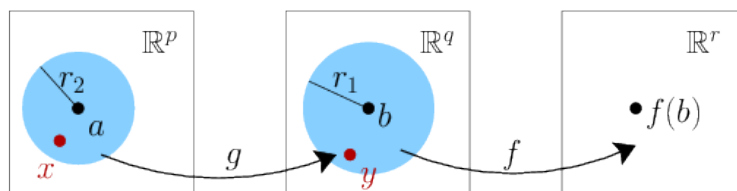
$$\underbrace{J(f \circ g)(a)}_{r \times p} = \underbrace{Jf(b)}_{r \times q} \cdot \underbrace{Jg(a)}_{q \times p} = Jf(g(a)) \cdot Jg(a).$$

**Bizonyítás.** Legyen

$$A = g'(a), \quad g(x) = g(a) + A(x - a) + \alpha(x)|x - a|,$$

$$B = f'(b), \quad f(y) = f(b) + B(y - b) + \beta(y)|y - b|,$$

( $\alpha(x)$   $q$ -dim. vektorértékű függvény, folyt.  $a$ -ban,  $\alpha(a) = 0_q$ ;  $\beta(y)$   $r$ -dim. vektorértékű függvény, folyt.  $b$ -ben,  $\beta(b) = 0_r$ .)



Az  $f$  értelmes valamilyen  $B(b, r_1)$  gömbben.

A  $g$  differenciálható, ezért folytonos is  $a$ -ban, így egy elég kis  $B(a, r_2)$  gömbben  $g$  értelmes és  $g(x) \in B(b, r_1)$ . Az  $r_2$ -t válasszuk olyan kicsinek, hogy  $x \in B(a, r_2)$  esetén  $|\alpha(x)| < 1$  legyen (ez jól fog jönni még).



Tehát a  $B(a, r_2)$  gömbben  $f \circ g$  értelmes (ez is kell a differenciálhatósághoz).  
A  $B(a, r_2)$  gömbben

$$\begin{aligned} |g(x) - g(a)| &= |A(x - a) + \alpha(x)|x - a| \leq |A(x - a)| + |\alpha(x)| \cdot |x - a| \leq \\ &\leq \|A\| \cdot |x - a| + 1 \cdot |x - a| = (\|A\| + 1)|x - a|. \end{aligned}$$

Mostantól  $y = g(x)$ . A  $B(a, r_2)$  gömbben

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x - a)| &= \\ &= |f(y) - f(b) - B(y - b) + B(y - b - A(x - a))| \leq \\ &\leq |f(y) - f(b) - B(y - b)| + |B(g(x) - g(a) - A(x - a))| \leq \\ &\leq |\beta(y)| \cdot |y - b| + \|B\| \cdot |g(x) - g(a) - A(x - a)| \leq \\ &\leq |\beta(y)| \cdot (\|A\| + 1)|x - a| + \|B\| \cdot |\alpha(x)| \cdot |x - a| = \\ &= \left( |\beta(g(x))| \cdot (\|A\| + 1) + \|B\| \cdot |\alpha(x)| \right) \cdot |x - a|. \end{aligned}$$

Tehát

$$\left| \frac{|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x - a)|}{|x - a|} \right| \leq |\beta(g(x))| \cdot (\|A\| + 1) + \|B\| \cdot |\alpha(x)|.$$

Rendőr-elv miatt  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x - a)|}{|x - a|} \right| = 0$ ;  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  differenciálható  $a$ -ban, és

$$(f \circ g)'(a) = BA = f'(b) \circ g'(a).$$

### 12.3. Következmény (összetett függvény differenciálási szabálya; láncszabály)

Ha  $g_1, \dots, g_q$   $p$ -változós, számértékű függvények, differenciálhatók az  $a \in \mathbb{R}^p$  pontban,  $b_j = g_j(a)$ , továbbá a  $q$ -változós, számértékű  $f$  függvény differenciálható a  $(b_1, \dots, b_q)$  pontban, akkor az  $F(x) = f(g_1(x), \dots, g_q(x))$  függvény is differenciálható az  $a$  pontban, és a parciális deriváltjait így írhatjuk fel:

$$D_i F(a) = \sum_{j=1}^q D_j f(b) \cdot D_i g_j(a) \quad \text{avagy} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^q \frac{\partial F}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

**Bizonyítás.** Az előző tétel speciális esete  $r = 1$ -re. Jacobi-mátrixokkal

$$\text{grad } F(a) = (D_1 f(b) \quad \dots \quad D_q f(b)) \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & \dots & D_p g_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 g_q(a) & \dots & D_p g_q(a) \end{pmatrix}$$

Ebből kell leolvasni az  $i$ -edik elemet, ami a  $\text{grad } f(b)$  vektor és a  $Jg(a)$  Jacobi-mátrix  $i$ -edik oszlopának szorzata.

### 12.4. Példa

Legyen  $g(t)$  és  $h(t)$  két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a  $t = a$  helyen,  $g(a) = b$ ,  $h(a) = c$ , továbbá legyen  $f(x, y) = x \cdot y$ . A láncszabály szerint az  $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$  is differenciálható az  $a$  helyen, és

$$\begin{aligned}(g \cdot h)'(a) &= D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(a) = \\ &= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).\end{aligned}$$

### 12.5. Példa

Ugyanez hányadosossal: most  $f(x, y) = x/y$  és  $h(a) = c \neq 0$ .

$$\begin{aligned}(g/h)'(a) &= D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(a) = \\ &= \frac{1}{c} \cdot g'(a) + \frac{-b}{c^2} \cdot h'(a) = \frac{1}{h(a)} \cdot g'(a) - \frac{g(a)}{h(a)^2} \cdot h'(a).\end{aligned}$$

Házi feladat kipróbálni ugyanezt  $n$ -tényezős szorzattal és hatványozással is.

### 12.6. Következmény

Differenciálható függvények szorzata és hányadosa is differenciálható (mindenhol, ahol nem kell nullával osztani.)

### 12.7. Példa

$g$   $p$ -változós,  $\mathbb{R}^q$ -ba képez.  $(|g|^2)' = ?$

$$f(y) = |y|^2 = y_1^2 + \dots + y_q^2$$

$$f'(y) = 2y^t$$

$$(|g|^2)' = 2g^t \cdot g'.$$

### 12.8. Példa

$g$   $p$ -változós,  $\mathbb{R}^q$ -ba képez,  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^r)$

$$A'(y) = A \quad (\text{v.ö. } (e^x)' = e^x \quad :-o)$$

$$(Ag(x))' = (A(g(x)))' = A \circ g'(x) = Ag'(x).$$

### 12.9. Példa

$g$   $p$ -változós,  $\mathbb{R}^q$ -ba képez,  $v \in \mathbb{R}^q$

$$\langle v, y \rangle' = v^t$$

$$\langle v, g(x) \rangle' = v^t g'(x).$$

## 12.10. Példa

Most legyen  $g$  és  $h$  két,  $\mathbb{R}^q$ -ba képező függvény, ami differenciálható az  $a \in \mathbb{R}^p$  pontban, és legyen  $f(x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_q) = x_1y_1 + \dots + x_qy_q$  az  $\mathbb{R}^q$ -beli skaláris szorzás.

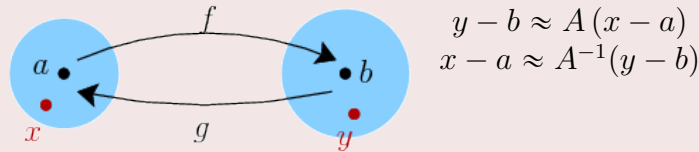
$$\text{grad } f = (y_1, \dots, y_q, x_1, \dots, x_q) = (y^t, x^t)$$

$$\langle g, h \rangle' = h^t g' + g^t h'$$

(Ha  $g$  egyváltozós, akkor  $\dots = \langle \text{grad } g, h \rangle + \langle h, \text{grad } g \rangle$ .)

## 12.11. Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya)

Legyen  $f$   $p$ -változós,  $\mathbb{R}^p$ -e képező leképezés, amely differenciálható az  $a$  pontban,  $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$  és tegyük fel, hogy  $f'(a) = A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$  invertálható.



Tegyük fel, hogy van egy szintén  $p$ -változós,  $\mathbb{R}^p$ -be képező  $g$  függvény, amely folytonos  $b$ -ben, és  $b$  egy környezetében  $f(g(y)) = y$ . Ekkor  $g$  differenciálható  $b$ -ben, és  $g'(b) = A^{-1}$  avagy  $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$ .

**Bizonyítás.** Végig  $y \in B(b, r)$  és  $x = g(y)$  lesz.

$$\begin{aligned} y - b &= f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a| \\ A^{-1}(y - b) &= (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|. \end{aligned}$$

Az  $\varepsilon(x) = \varepsilon(g(y))$  folytonos  $b$ -ben; ha  $|y - b|$  elég kicsi:  $\|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} |A^{-1}(y - b)| &\geq |x - a| - |A^{-1}\varepsilon(x)| \cdot |x - a| \geq \left(1 - \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)|\right) |x - a| \geq \frac{1}{2} |x - a| \\ |g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)| &= |x - a - A^{-1}(y - b)| = |A^{-1}\varepsilon(x)| \cdot |x - a| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)| \cdot 2|A^{-1}(y - b)| \leq \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)| \cdot 2\|A^{-1}\| \cdot |y - b|. \\ \frac{|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)|}{|y - b|} &\leq 2\|A^{-1}\|^2 \cdot |\varepsilon(g(y))| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

## 12.12. Kérdés

" $f$  egy  $p$ -változós,  $\mathbb{R}^p$ -e képező leképezés, amely differenciálható az  $a$  pontban,  $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$  és  $f'(a) = A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$  invertálható.

Ha van egy szintén  $p$ -változós,  $\mathbb{R}^p$ -be képező  $g$  függvény, amely folytonos  $b$ -ben, és  $b$  egy környezetében  $f(g(y)) = y$ ..."

Hogyan lehet egyszerűen eldönteni, vagy tudunk-e rá valami egyszerű elégséges feltételt, hogy van-e ilyen **lokális inverz**  $g$  függvény?

# Hivatkozások

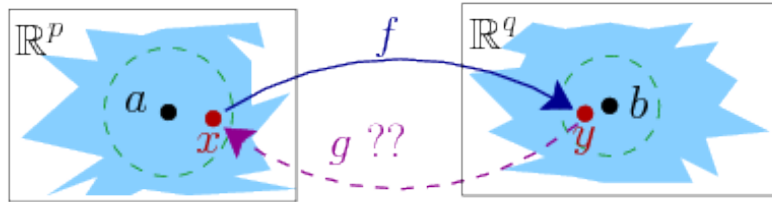
- [LTS1] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis I. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)
- [LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)
- [KG1] K.G.: Normák  $\mathbb{R}^p$ -ben,  
[https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3\\_01\\_normak.pdf](https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf)
- [KG2] K.G.: Többváltozós függvények alsó és felső határértéke,  
[https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3\\_02\\_limsup.pdf](https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_02_limsup.pdf)
- [KG3] K.G.: Vektorértékű függvények differenciálása,  
[https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3\\_03\\_VektorErtekuFvek.pdf](https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_03_VektorErtekuFvek.pdf),  
<https://www.youtube.com/watch?v=r2nQ87xP5rE>
- [KG4] K.G.: Inverz- és implicitfüggvény-tétel,  
[https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3\\_04\\_InvImplFv.pdf](https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_04_InvImplFv.pdf),  
<https://www.youtube.com/watch?v=5HiQ1IkLhQI>
- [KG5] K.G.: Analízis 4 jegyzetek  
[https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an4/Analizis4\\_Jegyzetek\\_v18.pdf](https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an4/Analizis4_Jegyzetek_v18.pdf)
- [KG6] K.G.: Mágneses örvényerősség és összehurkolódási szám  
[https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3\\_05\\_OsszeHurka.pdf](https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_05_OsszeHurka.pdf)
- [BStv] Biot-Savart törvény, Wikipedia,  
<https://hu.wikipedia.org/wiki/Biot-Savart-t%C3%B6rv%C3%A9ny>
- [Atv] Ampère-törvény, Wikipedia,  
<https://hu.wikipedia.org/wiki/Maxwell-egyenletek>
- [LN] Linking Number, Wikipedia,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Linking\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number)

# Előkészületben

## 13. Inverz- és implicitfüggvény-tétel

### Lokális inverz függvény

Mit várjunk el a lokális inverztől?



- Lokális inverz?
- Lokális injektivitás?
- Lokális szürjektivitás?
- Milyen tulajdonságú legyen az  $f'(a)$  lineáris leképezés?

### Injektív és szürjektív lineáris leképezések

Legyen  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  vagy  $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$  ( $A = f'(a)$  lesz)

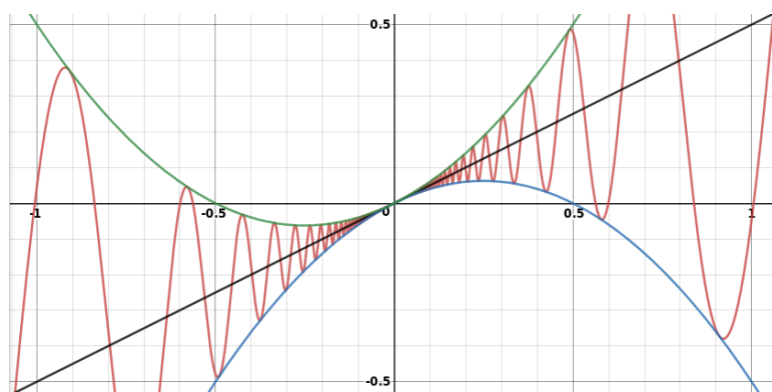
- $A$  injektív  $\iff \text{rk } A = p$  ( $p \leq q$  szükséges)  $\iff$  valamelyik  $p \times p$ -es részmátrix determinánusa nem 0
- $A$  szürjektív  $\iff \text{rk } A = q$  ( $q \leq p$  szükséges)  $\iff$  valamelyik  $q \times q$ -as részmátrix determinánusa nem 0
- $A$  injektív  $\iff A^t$  szürjektív
- $A$  invertálható  $\iff \text{rk } A = p = q$  avagy  $\det A \neq 0$

**Trivi** Ha  $A$  injektív / szürjektív / invertálható, akkor az  $A$  egy környezetében (ez a környezet a  $\text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$  térnek része) minden leképezés injektív / szürjektív / invertálható.

**Biz.** Mindhárom tulajdonság azt mondja, hogy bizonyos részmátrixok közül valamelyiknek a determinánusa nem 0.

A determináns folytonos (mert rac. tört függvény), így van az  $A$ -nak egy környezete, ahol ugyanannak a részmátrixnak a determinánusa nem 0.

### Önmagában a differenciálhatóság nem elég



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{10}{x} - 10 \cos \frac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Noha  $f'(0) \neq 0$ , még sincs lokális inverz a 0 körül. :-)

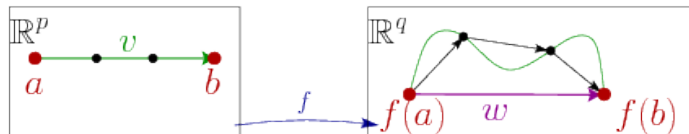
**A folytonos differenciálhatóságot is ki fogjuk kötni.**

## A lokális injektivitás tétele

**Tétel**lokális injektivitás Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ ;  $a \in \text{int } H$ .

Ha  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  folytonosan differenciálható az  $a$  pontban, és az  $f'(a)$  lineáris leképezés injektív,

akkor az  $a$  pontnak van egy olyan környezete, ahol  $f$  injektív.



**Lemma.** Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ ; az  $[a, b]$  szakasz része  $H$ -nek, a szakasz pontjaiban  $f$  differenciálható, és valamilyen  $M$  számmal  $\|f'\| \leq M$ . Ekkor

$$|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|.$$

**Biz.** Ha  $f(a) = f(b)$ , az állítás triviális. A továbbiakban  $f(a) \neq f(b)$ .

Legyen  $w = f(b) - f(a)$  és  $h(x) = \langle w, f(x) \rangle = w^t f(x)$ . Erre a függvényre

$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b) \rangle - \langle w, f(a) \rangle = \langle w, f(b) - f(a) \rangle = |f(b) - f(a)|^2.$$

Ahol  $f$  differenciálható, ott  $h$  is differenciálható, és  $h'(x) = w^t f'(x)$ .

A  $p$ -változós Lagrange-közéértéktétel szerint az  $[a, b]$  szakaszon van olyan  $c$  pont, amelyre  $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$ .

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)|^2 &= |h(b) - h(a)| = |h'(c)(b - a)| = |w^t \cdot f'(c) \cdot (b - a)| \leq \\ &\leq |w| \cdot |(f'(c) \cdot (b - a))| \leq |w| \cdot \|f'(c)\| \cdot |b - a| \leq |f(b) - f(a)| \cdot M \leq |b - a|. \end{aligned}$$

## A lokális injektivitás tétele, biz.

**Tétel**lokális injektivitás Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ ;  $a \in \text{int } H$ . Ha  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  folytonosan differenciálható az  $a$  pontban, és az  $f'(a)$  lineáris leképezés injektív, akkor az  $a$  pontnak van egy olyan környezete, ahol  $f$  injektív.

**Biz.** Legyen  $A = f'(a) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ , és  $m = \min(|Ax| : |x| = 1)$ .

Ez létezik, mert az egységgömbfelület kompakt, és  $Ax$  folytonos. Az  $m$  nem lehet 0, mert  $A$  injektív. Tehát  $m > 0$ .

Bármely  $x$  vektor valamilyen  $e$  egységvektor  $|x|$ -szerese, így

$$|Ax| = |A|x|e| = |Ae| \cdot |x| \geq m \cdot |x|.$$

Vegyük az  $a$  pontnak egy olyan  $B(a, r)$  környezetét, amelyben  $\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{m}{2}$ . Ilyen létezik, mert  $f'$  folytonos  $a$ -ban.

Legyen  $g(x) = f(x) - Ax$ ; a  $B(a, r)$  környezetben

$$g'(x) = f'(x) - A, \quad \|g'(x)\| = \|f'(x) - A\| < \frac{m}{2};$$

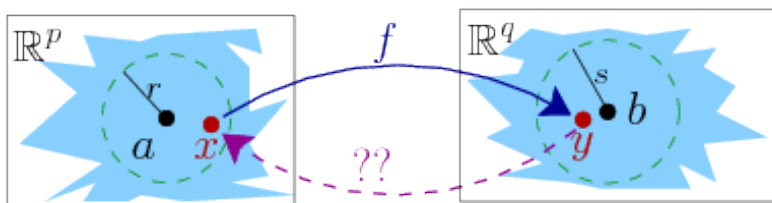
A lemma miatt  $x, y \in B(a, r)$  esetén  $|g(x) - g(y)| \leq \frac{m}{2}|x - y|$ ;

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |Ax - Ay + (f(x) - Ax) - (f(y) - Ay)| = |A(x - y) + (g(x) - g(y))| \geq \\ &\geq |A(x - y)| - |g(x) - g(y)| \geq m|x - y| - \frac{m}{2}|x - y| = \frac{m}{2}|x - y|. \end{aligned}$$

(Kicsit többet bizonyítottunk: van olyan  $c > 0$  hogy

$x, y \in B(a, r)$  esetén  $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$ .)

## A lokális szürjektivitás tétele



**Tétel**lokális szürjektivitás Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ ;  $a \in \text{int } H$ . Ha  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  folytonosan differenciálható az  $a$  pontban, és az  $f'(a)$  lineáris leképezés szürjektív, akkor az  $a$  pont bármely környezetének  $f$  szerinti képe tartalmazza az  $f(a)$  pont egy környezetét.

Avagy, ha  $b = f(a)$ ,  $\forall r > 0 \exists s > 0 \forall y \in B(b, s) \exists x \in B(a, r) f(x) = y$ .

**Biz.** A  $Jf(a)$  Jacobi-mátrix oszlopai között van  $q$  lin. független; az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez az első  $q$  oszlop.

Csak olyan  $x$ -eket fogunk keresni, amelyekben  $x_{q+1} = a_{q+1}$ , ldots  $x_p = a_p$ .

Mostantól tehát  $p = q$ ; és  $f'(a)$  invertálható.

## A lokális szürjektivitás tétele, biz. folyt.

Az  $a$  pont egy környezetében  $f'$  invertálható.

A lokális injektivitás tétele szerint az  $a$  egy környezetében  $f$  injektív.

Válasszunk olyan  $0 < r_0 < r-t$ , hogy az  $\bar{B}(a, r_0)$  zárt gömbön  $f$  injektív, és  $f'$  minden pontban invertálható.

Legyen  $s = \frac{1}{2} \min \{|f(x) - b| : |x - a| = r_0\} > 0$ . Azt állítjuk: ez az  $s$  jó.

Vegyünk egy tetszőleges  $y \in B(b, s)$  pontot; ehhez kell nekünk olyan  $x \in B(a, r_0)$  pontot találni, ahol  $f(x) = y$ .

Legyen a  $\bar{B}(a, r_0)$  zárt gömbön  $h(x) = |f(x) - y|^2$ , és keressük  $h$  minimumát.

A Weierstrass-tétel miatt biztosan van  $h$ -nak minimuma.

A középpontban  $h(a) = |b - y|^2 < s^2$ .

A határpontokban  $|f(x) - y| = |(f(x) - b) - (y - b)| \geq |f(x) - b| - |y - b| > 2s - s = s$ , ezért  $h(x) = |f(x) - y|^2 > s^2 > h(a)$ . A minimumhely nem lehet a határon; belső pontban veszi fel a  $h$  függvény.

Legyen  $x_0$  a minimumhely; ez lokális minimumhely, tehát  $h' = 0$ :

$$0 = h'(x_0) = 2(f(x_0) - y)^t \cdot f'(x_0) = 0.$$

Az  $f'(x_0)$  invertálható, tehát  $f(x_0) - y = 0$ .

Találtunk olyan  $x_0 \in B(a, r_0) \subset B(a, r)$  pontot, amire  $f(x_0) = y$ .

## A lokális szürjektivitás tétele, alt. biz.

Az  $f(x) = y$  egyenlet egy megoldását iterációval is megtalálhattuk volna.

**Heurisztika:** Ha  $f(x_0) - y$ , és  $x$  közel  $x_0$ -hoz, akkor

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)|x - x_0| = y + A(x - x_0)\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$A^{-1}(f(x) - y) = x - x_0 + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|$$

$$x_0 = x - A^{-1}(f(x) - y) + A^{-1}\varepsilon(x)|x - x_0|.$$

Legyen

$$x_1 = a; \quad x_{n+1} = x_n - A^{-1}(f(x_n) - y)$$

Ha ez konvergens,  $x_n \rightarrow x_0$ , akkor

$$x_0 = x_0 - A^{-1}(f(x_0) - y) \\ f(x_0) = y.$$

Miért lenne konvergens? Honnan tudjuk, hogy nem megy el messzire?

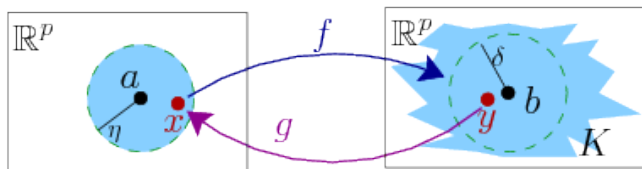
Válasz: Kontrakció, Banach-fixponttétel. Részletek a könyvben.

## Nyílt leképezések

**Definíció** | Ha  $H \subset \mathbb{R}^p$  nyílt,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ , és minden  $G \subset H$  halmazra a  $f(G)$  halmaz nyílt, akkor  $f$  **egy nyílt leképezés**.

**Követelmény**nyílt leképezés tétele Ha  $H \subset \mathbb{R}^p$  nyílt,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  folytonosan differenciálható, és  $H$  minden pontjában  $f'$  szürjektív, akkor  $f$  nyílt leképezés.

# Inverzfüggvénytétel



## Tétel Inverzfüggvénytétel

Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ ;  $a \in \text{int } H$ ,  $b = f(a)$ .

Ha  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^p$  folytonosan differenciálható az  $a$  pontban, és az  $f'(a)$  lineáris leképezés invertálható,

akkor léteznek olyan  $\delta > 0$  és  $\eta > 0$  számok, hogy

(1) Minden  $x \in B(y, \delta)$  ponthoz létezik pontosan egy olyan  $x \in B(a, \eta)$  pont, amelyre  $f(x) = y$ .  
Avagy, létezik olyan  $g : B(b, \delta) \rightarrow B(a, \eta)$  függvény, amelyre  $f(g(y)) = y$ .

(2) Az  $g$  függvény differenciálható, és  $g'$  folytonos  $b$ -ben.

(3) A  $B(a, \eta)$  gömb pontjaiban  $f'$  invertálható, és  $g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$ .

**Biz.** Olyan kicsi  $\eta$ -t választunk, amelyre a  $\overline{B}(a, \eta)$  zárt gömbön  $f$  injektív, és  $f'$  a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen  $K = f(B(a, \eta))$ .

Lokális szürjektivitás: van olyan  $\delta$ , hogy  $B(b, \delta) \subset f(B(a, \eta))$ . (nyílt gömbök)

Minden  $y \in K$ -hoz van pontosan egy olyan  $x \in B(a, \eta)$ , amire  $f(x) = y$ . Ha  $y \in B(b, \delta)$ , akkor  $x \in B(a, \eta)$ . Tehát  $g$  létezik.

Az  $\overline{B}(a, \eta)$  zárt gömb kompakt,  $f$  folytonos, ezért  $K$  is kompakt. A  $g$  függvény az  $f$  folytonos injektív függvény inverze, ezért  $g$  a  $K$  halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely  $y \in B(b, \delta)$  pont egy kis környezetében  $g$  értelmezett,  $g$  folytonos, az  $x = g(y) \in B(a, \eta)$  pontban  $f'(a)$  invertálható, és  $f(g(y)) = y$ . Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint  $g$  differenciálható  $y$ -ban, és  $g'(y) = (f'(x))^{-1}$ .

A  $g'$  folytonos  $b$ -ben:  $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ ,  $g$  folytonos  $y$ -ban,  $f'$  folytonos  $g(y) = x$ -ben, és a mátrixinverz is folytonos.

## Implicit függvények

Függvény **explicit** (közvetlen) megadása:  $g : (x_1, \dots, x_p) \rightarrow (y_1, \dots, y_q)$

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_p) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

vagy

$$y = g(x)$$

**Implicit** (közvetett) megadás:  $g : (x_1, \dots, x_p) \rightarrow (y_1, \dots, y_q)$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ f_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \end{aligned}$$

vagy

$$f(x, y) = 0_q$$

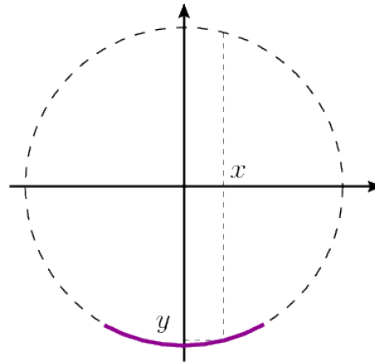
(egyenletrendszer)



## Implicit függvények

**Példa.** Implicit megadás:  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $|x| < \frac{1}{2}$ ,  $y < 0$

Explicit megadás:  $|x| < \frac{1}{2}$ ,  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ .



Bonyolultabb egyenleteket nem biztos, hogy expliciten meg tudunk oldani. (Ez az algebristák dolga lenne.) Viszont az olyan esetekben is szeretnénk az impliciten megadott függvényt deriválni, amikor nincs explicit megoldás.

**Kérdés** Honnan tudjuk, hogy egyáltalán van megoldása az egyenletrendszernek? Na és ha több is van, melyiket vegyük?

**Kérdés** Ha tudunk egy  $(a, b)$  pontpárt, ami megoldása az egyenletrendszernek, lesz-e körülötte egy egyértelmű lokális megoldás, görbedarab?

**Kérdés** Ha van is lokális implicit függvény, biztosak lehetünk benne, hogy differenciálható? Milyen képlet adja meg a deriváltat?

## Implicit függvény differenciálása

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$ ;  $g(x) \in \mathbb{R}^q$ ;  $f$  egy  $p + q$  változós, és  $\mathbb{R}^q$ -ba képez.

Most jelentse  $D_1 f$  az  $f$  első  $p$  változó szerinti parciális deriváltját ( $D_1 f(x, y) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ ) és  $D_2 f$  az  $f$  utolsó  $q$  változó szerinti parciális deriváltját ( $D_2 f(x, y) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$ ).

Deriváljuk mindkét oldalt:

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$$\underbrace{D_1 f(x, g(x))}_{q \times p} + \underbrace{D_2 f(x, g(x))}_{q \times q} \cdot \underbrace{g'(x)}_{q \times p} = 0_{q \times p}$$

$$D_2 f(x, g(x)) \cdot g'(x) = -D_1 f(x, g(x))$$

És ha  $D_2 f(x, g(x))$  invertálható is, akkor

$$g'(x) = -\left(D_2 f(x, g(x))\right)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

Érdemes lesz feltenni, hogy  $D_2 f(x, g(x))$  invertálható.

## Implicitfüggvény-tétel

**Tétel** implicitfüggvény-tétel Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  és  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  (az egyenletrendszer).

Tegyük fel, hogy  $a \in \mathbb{R}^p$ ,  $b \in \mathbb{R}^q$ ,  $(a, b) \in \text{int } H$ , és  $f(a, b) = 0_q$  (vagyis az  $(a, b)$  egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).

Ha  $f$  folytonosan differenciálható az  $(a, b)$  pontban, és  $D_2 f(a, b)$  invertálható, akkor

Léteznek olyan  $\delta > 0$  és  $\eta > 0$  számok, hogy

- (1) Minden  $x \in B(a, \delta)$  ponthoz létezik pontosan egy olyan  $y = g(x) \in B(b, \eta)$  pont, amelyre  $f(x, y) = 0_q$ .
- (2) Az így definiált  $g(x)$  függvény differenciálható a  $B(a, \delta)$  gömbben, és

$$g'(x) = -\left(D_2 f(x, g(x))\right)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

- (3)  $g'$  folytonos az  $a$  pontban.

**Biz.** Könnyebb többet bizonyítani. Az egyenletrendszer jobboldalán a  $0_q$  vektor helyére is tegyünk egy  $z \in \mathbb{R}^q$  vektort. Az új egyenlet:

$$f(x, y) = z.$$

Azt állítjuk, hogy minden  $a$ -hez közeli  $x$  és  $0_q$ -hoz közeli  $z$  esetén ehhez van egy egyértelmű  $y$  ami megoldása.

Definiáljuk a következő,  $p + q$  változós,  $\mathbb{R}^{p+q}$ -ba képező függvényt:

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ f_1(x, y) \\ \vdots \\ f_q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverzfüggvénytételt az  $(a, b)$  pontban.

Az  $(a, b)$  pontban  $f$  folytonosan differenciálható és  $F(a, b) = (a, 0)$ .

Az  $(a, b)$  pontbeli derivált blokkmátrix alakban

$$F'(a, b) = \begin{pmatrix} D_1x|_{x=a} & D_2x|_{x=a} \\ D_1f(a, b) & D_2f(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p \times p} & 0_{p \times q} \\ D_1f(a, b) & D_2f(a, b) \end{pmatrix}.$$

Ez invertálható, mert a jobb alsó sarok invertálható.

Az inverzfüggvénytétel feltételei teljesülnek;  $F$ -nek létezik egy lokális inverze az  $(a, 0)$  egy környezetében, és a lokális inverz folytonosan differenciálható az  $(a, 0)$  pontban.

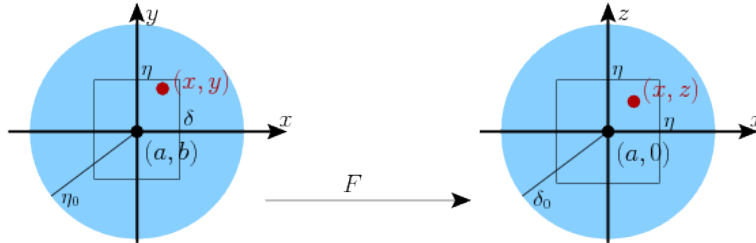
$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}; \quad F' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1f(a, b) & D_2f(a, b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan  $\delta_0, \eta_0 > 0$  számok, hogy minden  $(x, z) \in B((a, 0), \delta_0)$  párhoz létezik olyan egyértelmű  $(w, y) \in B((a, b), \eta_0)$  pár, amire  $F(w, y) = (x, z)$ .

Persze  $w = x$ , szóval az inverz leképezés  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ G(x, z) \end{pmatrix}$  alakú.

Az óhajtott  $g$  függvény a  $G$ -nek a  $z = 0_q$  szekciója lesz:  $g(x) = G(x, 0_q)$ . Ez teljesíti az  $f(x, g(x)) = 0_q$  függvényegyenletet, és folytonosan differenciálható az  $a$  pontban.

(Félre: csak a  $\delta, \eta$  számokat ne kellene vagdosni...)



Legyen  $\eta = \frac{1}{2}\eta_0$ . Válasszunk olyan  $0 < \delta \leq \delta_0$  számot, hogy minden  $x \in B(a, \delta)$  esetén  $|g(x)| < \eta$  is teljesüljön. Ekkor tehát a kicsit nagyobb halmazon is egyértelmű  $(x, y) \in B((a, b), \eta_0)$  pontunkra az is igaz, hogy  $|y| = |g(x)| < \eta$ .

A  $g$  deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \quad F' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p \times p} & 0 \\ D_1f(x, y) & D_2f(x, y) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_{p \times p} & 0 \\ D_1f(x, y) & D_2f(x, y) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p \times p} & 0 \\ -(D_2f(x, y))^{-1} D_1f(x, y) & (D_2f(x, y))^{-1} \end{pmatrix};$$

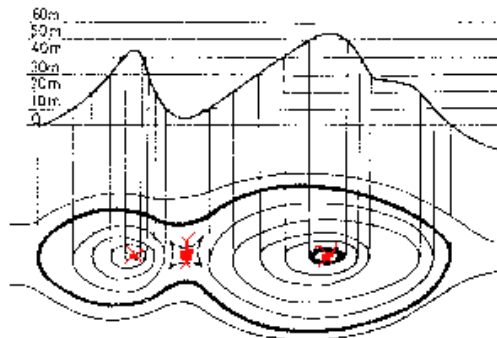
Az első blokkoszlop az  $x$ , a második a  $z$  szerinti derivált, tehát

$$g'(x) = -(D_2f(x, y))^{-1} D_1f(x, y) = -(D_2f(x, g(x)))^{-1} D_1f(x, g(x)).$$

# Az implicitfüggvény-tétel következményei

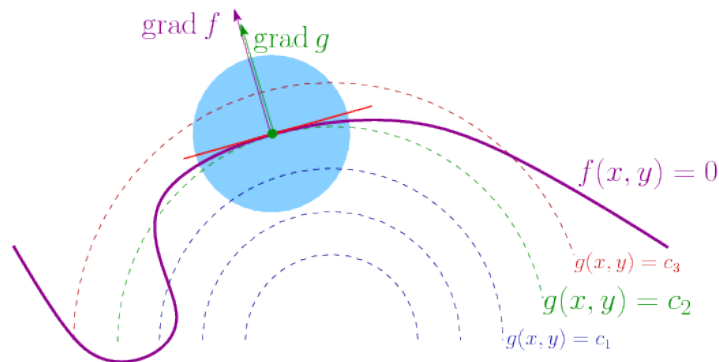
$p + q$  változóra  $p$  "független" egyenlet:  $q$ -dimenziós grafikondarab (paraméteres felület).

Szintvonalas térképek: ha valahol a függvény folytonosan differenciálható, és a gradiens nem a nullvektor, ott a szintvonal (valamilyen függvényérték őskepe) lokálisan egy folytonosan differenciálható görbedarab.



## Feltételes lokális szélsőértékek

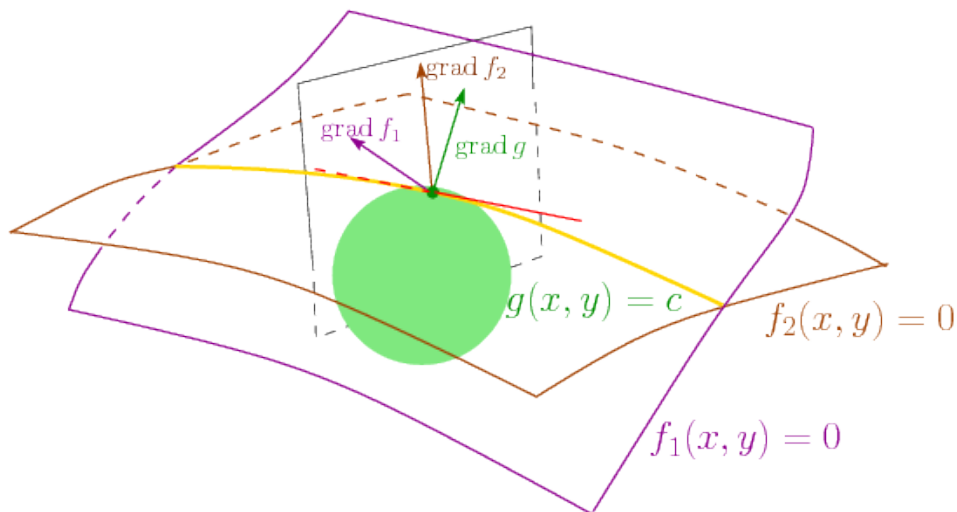
**Példa.** A  $g(x, y)$  függvény minimumát vagy maximumát keressük az  $f(x, y) = 0$  görbén.



Sejtésünk: a szélsőértékhelyen  $\text{grad } f$  és  $\text{grad } g$  párhuzamos, mert a görbe irányában  $f$  és  $g$  iránymenti deriváltja 0.

$$\text{grad } g = \lambda \cdot \text{grad } f? \quad \lambda_0 \cdot \text{grad } g = \text{grad } f? \quad \lambda_0 \cdot \text{grad } g = \lambda \cdot \text{grad } f?$$

**Példa.** A  $g(x, y, z)$  függvény minimumát vagy maximumát keressük az  $f_1(x, y, z) = 0$  és  $f_2(x, y, z) = 0$  felületek metszsvonalán.



Sejtésünk: a szélsőértékhelyen  $\text{grad } f_1$ ,  $\text{grad } f_2$  és  $\text{grad } g$  egy síkban van, mert merőlegesek a görbe "irányára".

$$\text{grad } g = \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad } f_2? \quad \lambda_0 \cdot \text{grad } g = \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad } f_2?$$

A  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q$  neve: "Lagrange-multiplikátorok"

## Lagrange féle multiplikátor módszer

**Definíció** Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$  (ért.tart.),  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$  ("feltétel" vagy "egyenletrendszer"),  $g : H \rightarrow \mathbb{R}$  ("célfüggvény") és  $a \in \text{int } H$  olyan pont, ahol  $f(a) = 0$ .

Azt mondjuk, hogy a  $g$  függvénynek **feltételes lokális maximuma van az  $a$  pontban az  $f = 0$  feltétel mellett**, ha van olyan  $r > 0$ , hogy a  $B(a, r) \subset H$  környezet bármely  $x$  pontjában, amelyre  $f(x) = 0$ , igaz az, hogy  $g(x) \leq g(a)$ .

A  $g$  függvénynek **feltételes lokális minimuma van az  $a$  pontban az  $f = 0$  feltétel mellett**, ha van olyan  $r > 0$ , hogy a  $B(a, r) \subset H$  környezet bármely  $x$  pontjában, amelyre  $f(x) = 0$ , igaz az, hogy  $g(x) \geq g(a)$ .

A  $g$  függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az  $a$  pontban az  $f = 0$  feltétel mellett, ha  $a$ -ban feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma az  $f = 0$  feltétel mellett.

**Tétel** (Lagrange féle multiplikátor módszer) Legyen  $H \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $g : H \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \text{int } H$  olyan pont, ahol  $f(a) = 0$ . Ha  $f$  és  $g$  folytonosan differenciálható az  $a$  pontban, és  $g$ -nek lokális szélsőértéke van  $a$ -ban az  $f = 0$  feltétel mellett, akkor a  $\text{grad } g(a)$ ,  $\text{grad } f_1(a)$ ,  $\dots$ ,  $\text{grad } f_q(a)$  vektorok lineárisan összefüggőek, avagy vannak olyan  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q$  valós számok, nem mindegyik 0, hogy

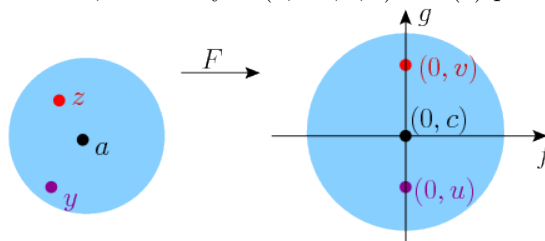
$$\lambda_0 \cdot \text{grad } g(a) = \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1(a) + \dots + \lambda_q \cdot \text{grad } f_q(a).$$

**Biz.** Indirekt. Legyen  $c = g(a)$ , és tegyük fel, hogy  $\text{grad } g(a)$ ,  $\text{grad } f_1(a)$ ,  $\dots$ ,  $\text{grad } f_q(a)$  vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \quad JF(a) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_q(a) \\ \text{grad } g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát  $F'(a)$  egy szürjektív leképezés. Az  $F$  tehát lokálisan szürjektív.

Bármely  $r > 0$  esetén  $F(B(a, r))$  tartalmazza az  $F(a) = (0_q, c)$  pont egy környezetét. Ebben a környezetben van olyan  $(0, \dots, 0, u) = F(y)$  pont, ahol  $u < c$ , és van olyan  $(0, \dots, 0, v) = F(z)$  pont is, ahol  $v > c$ .



Tehát bármilyen  $r > 0$ -hoz vannak olyan  $y, z \in B(a, r)$  pontok, amelyekre  $f(y) = f(z) = 0_q$ ,  $g(y) < g(a)$  és  $g(z) > g(a)$ . Akkor viszont  $g$ -nek nincs sem feltételes lokális minimuma, sem feltételes lokális maximuma az  $a$  pontban.

**Példa.** Számítsuk ki  $x + 2y$  minimumát és maximumát az  $x^2 + y^2 = 5$  körön.

Feltétel:  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ ; célfüggvény:  $g(x, y) = x + 2y$ .

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.

A Lagrange multiplikátor módszer szerint a feltételes lokális szélsőérték helyeken  $\text{grad } f = (2x, 2y)$  és  $\text{grad } g = (1, 2)$  egymás konstansszorososa:  $\text{grad } f = \lambda \cdot \text{grad } g$ . Ezt az egyenletrendszert kaptuk:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 5 &= 0; \\ 2x &= \lambda; \\ 2y &= 2\lambda. \end{aligned}$$

Megoldva  $\lambda = \pm 2$ ,  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 2$ .

Tehát két megoldás van:  $(x, y) = (1, 2)$  vagy  $(x, y) = (-1, -2)$ ; ezek a gyanús pontok, közöttük van a minimum és a maximum is, meg az is aki csak rosszkor volt rossz helyen.

Behelyettesítve  $g(1, 2) = 5$ ,  $g(-1, -2) = -5$ . Tehát az  $x^2 + y^2 - 5 = 0$  feltétel mellett  $x + 2y$  maximuma 5, minimuma -5.

**Példa.** Határozzuk meg  $xyz$  legnagyobb értékét az  $x + y + z = 5$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  feltétel mellett.

Feltétel:  $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$ ,  $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ ; célfüggvény:  $g(x, y, z) = xyz$ .

A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum.

Olyan pontokat keresünk, ahol  $\text{grad } f_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\text{grad } f_2 = (2x, 2y, 2z)$  és  $\text{grad } g = (yz, zx, xy)$  lineárisan összefüggő.

$$\text{grad } g = \lambda_1 \cdot \text{grad } f_1 + \lambda_2 \cdot \text{grad } f_2$$

$$\lambda_0 \cdot (yz, zx, xy) = \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (2x, 2y, 2z)$$

Ez az egyenletrendszer kell megoldanunk:

$$\begin{aligned}x + y + z - 5 &= 0 \\x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ \lambda_0 \cdot yz &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2x \\ \lambda_0 \cdot zx &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2y \\ \lambda_0 \cdot xy &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2z.\end{aligned}$$

Vagy helyette

$$\begin{aligned}x + y + z - 5 &= 0 \\x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} yz & zx & zy \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} &= 0\end{aligned}$$

## Szorgalmi házi feladat

A lokális szürjektivitás tételéhez sokkal kevesebb feltétel is elég lenne. Például a bizonyítás egy kicsi módosításával nincs is szükség arra, hogy folytonos a derivált

Vezessük le a lokális szürjektivitás tételét a Brouwer-fixponttételeből, és próbáljunk minél gyengébb feltételt kitálcálni, amivel a lokális szürjektivitás tétele még igaz marad.

Hogyan gyengíti ez a Lagrange multiplikátor módszer szükséges feltételeit?