Analízis 3 jegyzetek

(Utolsó módosítás: 2021. november 21., 12:13)

A tervezett témák

2/3. hét, szept. 6–19: Topológiai alapfogalmak véges dimenziós euklideszi terekben. Konvergencia és topologikus alapfogalmak (belső pont, határpont, külső pont, torlódási pont, izolált pont, nyílt halmaz, zárt halmaz, kompakt halmaz) euklideszi és metrikus terekben. Többváltozós, illetve metrikus téren értelmezett függvények és leképezések határértéke és folytonossága. Átviteli elvek. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban.

4/5/6. hét, szept. 20 – okt. 10: Többváltozós függvények differenciálszámítása. Deriválás koordinátafüggvényenként. Szélsőérték-keresés kompakt halmazon értelmezett függvényekre. Iránymenti és parciális deriváltak, Jacobi-mátrix. A gradiens. Érintősík. Lagrange-féle középértéktétel. A Lagrange-féle becslés leképezésekre. A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételei. Az inverz leképezés deriváltja, inverzfüggvénytétel. Az implicit leképezés tétele. Feltételes szélsőérték-feladat, Lagrange-féle multiplikátorszabály. n-szer differenciálható leképezések. A Young-tétel. A Taylor-formula. Lokális szélsőérték szükséges, ill. elégséges feltételei.

7/8/10. hét, okt. 11 – nov. 7: Jordan-mérték és többváltozós integrálszámítás. A Jordan-féle belső és külső mérték. A határ külső mértéke. Jordan-mérhető halmazok. A mérhetőség pontos feltétele. A konvex poliéderek és a normáltartományok mérhetősége. A parallelepipedonok térfogata. A Jordan-mérték egybevágóság-invarianciája. A többszörös integrál. Definíció, alaptulajdonságok, az integrálhatóság ekvivalens feltételei. Folytonos és korlátos függvények integrálhatósága. Egy halmaz mérhetőségének és karakterisztikus függvénye integrálhatóságának ekvivalenciája. Folytonos függvénnyel való kompozíció integrálhatósága. A lebontási tétel. A Cavalieri-elv. Normáltartományok térfogata. A gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció. Polárkoordinátás helyettesítés.

11/12. hét, nov. 8–21: Paraméteres integrálok. Paraméteres integrálok folytonossága, differenciálása és integrálása. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, differenciálása és integrálása. Elégséges feltétel az improprius paraméteres integrál egyenletes konvergenciájára. Gamma- és Béta-függvény.

13/14/15. hét, nov. 22 – dec. 12.: Valós vonalintegrálok és integráltételek. Görbék ívhossza. A vonalintegrál és kiszámítása. A Newton-Leibniz-formula. A primitív függvény létezésének feltételei. Vonalintegrál és homotópia. Gauss-féle összekapcsolódási szám. Divergencia és rotáció; integráltételek két és három dimenzióban. Maxwell-egyenletek.

Emlékeztető az Analízis 3 előadásokról (2021. ősz)

1. előadás, 2021. szept. 7.

Euklideszi távolság $\mathbb{R}^p$-ben. Nyílt és zárt gömbök. Konvergens pontsorozatok. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. $a_n \to b$ akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, 2, \ldots, p$ esetén $a_{n,i} \to b_i$. Linearitás. Cauchy-tulajdonság. Az $(\mathbb{R}^p, |.|)$ tér teljes. Korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

Normák. A $\|.\|_q$ $(q \geqslant 1)$ és $\|.\|_\infty$ normák. $0 < q < 1$ esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség. Minkowski egyenlőtlenség.

2. előadás, 2021. szept. 8.

$1 \leqslant q \leqslant \infty$ esetén $\|.\|_q$ tényleg norma. Normák ekvivalenciája. $\mathbb{R}^p$-ben bármely $\|.\|$ norma ekvivalens az $|.|$ normával. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpéldák végtelen dimenziós esetben. `https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf`

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja. Halmaz belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz. [LTS2, 13–19. o.]

3. előadás, 2021. szept. 14.

Halmaz lezártja. Cantor metszettétel. Kompakt halmaz definíciója. Borel tétel, bizonyítás Lindelöf-lemmával és Cantor metszettétellel. Kompakt és vele diszjunkt zárt halmaz távolsága pozitív A hegymászós feladat, hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség.

4. előadás, 2021. szept. 15.

Bármely $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha nem bontható fel két diszjunkt, nemüres nyílt halmaz uiójára. Ha egy halmaz ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő. Van olyan halmaz, ami összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő. $\mathbb{R}^p$ összefüggő. A teljes téren és az üres halmazon kívül nincs $\mathbb{R}^p$-nek olyan részhalmaza, ami egyszerre nyílt és zárt. Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor bármely két pontja összeköthető töröttvonallal. Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor ívszerűen összefüggő. Minden nyílt halmaz ívszerűen összefüggő komponensekre bontható. Tartomány.

p-változós függvények. Véges és végtelen határértékek az értelmezési tartomány egy részhalmazára szorítkozva. Limsup, liminf. $\liminf\limits_{a,A} f \leqslant \limsup\limits_{a,A} f$.

5. előadás, 2021. szept. 21.

$\liminf\limits_{a,A} f = \limsup\limits_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$. $\limsup\limits_{a,A} f = max\{\lim f(x_n : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a\}$. Átviteli elvek. Határátmenet limsupra és liminfre.

Többváltozós függvények folytonossága. Átviteli elv. Folytonosság részhalmazokon. Szekciófüggvények. Példa olyan függvényre, amelynek minden szekciófüggvénye folytonos, de a függvény nem folytonos. Műveletek. Az elemi függvények folytonossága. Weierstrass-tétel. [LTS2, 32–36. o.]

6. előadás, 2021. szept. 22.

Heine tétele.

Parciális differenciálhatóság. Példa parciálisan differenciálható, de nem folytonos függvényre. Lokális szélsőértékek. Szélsőértékkeresés a parciális deriváltak nullhelyeinek mekeresésével. Adott körbe írt maximális területű háromszög. [LTS2, 39–43. o.]

Lineáris függvény; átírás vektorok skaláris szorzatával és mátrixszorzással. Többváltozós függvény differenciálhatósága. A differenciálhatóságból következik a folytonosság. Érintősík. Egyértelműség. [LTS2, 45–47. o.]

7. előadás, 2021. szept. 28.

Deriváltvektor, gradiens. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Minden polinomfüggvény és minden racionális tört függvény, továbbá (ha elhagyjuk az ért. tartományok végpontait) minden elemi függvény differenciálható. [LTS2, 48–53. o.]

Iránymenti derivált. Az iránymenti derivált kiszámítása. Lagrange-középértéktétel. Becslés a függvény megváltozására. Ha egy tartományod a derivált 0, akkor a függvény konstans. [LTS2, 53–56. o.]

8. előadás, 2021. szept. 29.

Vektorértékű függvények. Határérték, folytonosság, átviteli elvek. A határérték létezése és a folytonosság ekvivalens a koordinátafüggvények határértékével, ill. folytonosáágával. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezések. Mátrix alak. Lineáris leképezés normája. Differenciálhatóság. A diff.hatóság ekvivalens azzal, hogy mindegyik koordinátafüggvény differenciálható. Ha differenciálható, akkor folytonos. A derivált egyértelműsége. Jacobi-mátrix. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Folytonos differenciálhatóság. Blokkmátrixok. [LTS2, 81–89. o.]

Differenciálási szabályok: konstansszoros, összeg. Láncszabály ($\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ és $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ függvény kompozíciója). [LTS2, 90–91. o.]

9. előadás, 2021. okt. 5.

A láncszabály átírása számértékű függvényekkel. Szorzat, hányados, hatvány differenciálási szabálya. Differenciálható függvények szorzata, hányadosa is differenciálható. $|g(x)|^2$, $Ag(x)$, $v^t g(x)$ differenciálása.

Lokális inverz függvények. A lokális inverz függvény differenciálási szabálya.

Lokálisan injektív és lokálisan szürjektív leképezések. Injektív, szürjektív, és invertálható lineáris leképezések.

10. előadás, 2021. okt. 6.

Példa arra, hogy a derivált érték injektivitása nem elég a függvény lokális injektivitásához. Felső és alsó becslés $|f(u) - f(v)|$-re. A lokális injektivitás tétele.

A lokális szürjektivitás tétele. Bizonyítás minimumkereséssel és Banach-fixponttétellel.

11. előadás, 2021. okt. 12.

Inverzfüggvénytétel.

Függvények explicit és implicit megadása. Az imlicit módon megadott, differenciálható függvény differenciálása. Kimondtuk az implicitfüggvény-tételt. Példák arra, hogy a $D_2 f(a, b)$ folytonossága vagy invertálhatósága nélkül a tétel nem igaz.

12. előadás, 2021. okt. 13.

Bebizonyítottuk az implicitfüggvény-tételt. Következmények: impliciten megadott felület és szintvonalak simasága.

Heurisztika (mese) a Lagrange-multplikátorokról.

13. előadás, 2021. okt. 19.

Bebuzonyítottuk a Lagrange-multiplikátor módszert a lokális szürjektivitásból.

Definiáltuk a másodrendű paricális deriváltakat. Voltak pédák arra, amikor a parciális deriváltak sorrendje felcserélhető, s amikor nem. Definiáltuk a másodrendű differenciálhatóságot és folytonos differenciálhatóságot. Kimondtuk a Young-tételt.

14. előadás, 2021. okt. 20.

Young-tétel, Hesse-mátrix. Magasabb rendű deriválhatóság és folytonos differenciálhatóság. A k-adik derivált, mint k-lineáris függvény.

Többváltozós Taylor-polinomok. k-adik differenciál.

15. előadás, 2021. nov. 2.

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(x)}{|x-a|^n} = 0$. Taylor-formula. Kvadratikus alakok. p-dimenziós konvexitás jellemzése a második differenciál viselkedésével. Lokális szélsőértékek jellemzése a másdik differenciállal.

16. előadás, 2021. nov. 3.

Külső és belső Jordan-mérték. Ekvivalens definíció kockázással. Alapvető tualjdonságok. A mérhető halmazok gyűrűje. [LTS2, 115–123. o.]

17. előadás, 2021. nov. 9.

Példák Jordan-mérhető halmazokra. A mérték átírása a szeletek mértékének integráljaként. Háromszög, kúp, gömb térfogata. Lineaáris transzformáció szerinti képhalmaz mértéke. [LTS2, 126–139. o.]

18. előadás, 2021. nov. 10.

Jordan-mérték szerinti integrál. Felosztás, finomság, alsó, felső és oszcillációs összeg, alsó és felső integrál. Additivitás. Minden ε-hoz van olyan δ, hogy minden δ-nál finomabb felosztásra az alsó és felső összeg ε-nál pontosabban közelítik az alsó, ill. felső integrált. Linearitás. A majdnem mindenütt folytonos függvények integrálhatósága. [LTS2, 158–162. o.]

19. előadás, 2021. nov. 16.

Normáltartomány térfogata.

Ha $A \subset \mathbb{R}^p$ és $B \subset \mathbb{R}^q$ téglák, $f : A \times B \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor

$$\underline{\int}_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \underline{\int}_A \left(\underline{\int}_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, \dots, \overline{\int}_B \left(\overline{\int}_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \leqslant \overline{\int}_{A\times B} f f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

A szukcesszív integrálás tétele. Integrálok felcserélhetőségének feltételei. [LTS2, 158–162. o.]

20. előadás, 2021. nov. 17.

Mérték- és integráltranszformáció (bizonyítás nélkül). Polárkoordináták. A kör és a 3-dimenziós gömb térfogatának kiszámítása. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ kiszámítása. [LTS2, 163–167. o.]

Paraméteres integrálok. Gamma- és Béta-függvény. $\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\,\mathrm{d}x$ és $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ kiszámítása. Az $F(t) = \int_A f(t,x)\,\mathrm{d}x$ alakú paraméteres integrálok folytonossága. [LTS2, 358–361. o.]

21. előadás, 2021. nov. 23.

22. előadás, 2021. nov. 24.

23. előadás, 2021. nov. 30.

24. előadás, 2021. dec. 1.

25. előadás, 2021. dec. 7.

I. Topológiai alapfogalmak $\mathbb{R}^p$-ben

1. Pontsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$-ben

Euklideszi távolság $\mathbb{R}^p$-ben. Nyílt és zárt gömbök. Konvergens pontsorozat. Ekvivalens átfogalmazások. Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. $a_n \to b$ akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, 2, \dots, p$ esetén $a_{n,i} \to b_i$. Linearitás. Cauchy-tulajdonság. Az $(\mathbb{R}^p, |.|)$ tér teljes. Korlátos sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. [LTS2, 9–12. o.]

1.1. Mese (p-dimenziós euklideszi tér)

- Pontok: $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{p} = \big\{(x_1, \ldots, x_p) : x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}\big\}$;
- $\mathbb{R}$ fölötti vektortér
- Euklideszi norma: $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2}$
  - $|x| \geqslant 0$, egyenlőség csak $x = 0^p$ esetén
  - $|cx| = |c| \cdot |x|$
  - $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; indukcióval akárhány tagra
- Euklideszi távolság: $d(x, y) = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_p - x_p)^2}$
- Skaláris szorzat: $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p$.

1.2. Definíció (nyílt és zárt gömbök)

Ha (H, d) metrikus tér, akkor az $a \in H$ körüli, $r > 0$ sugarú "nyílt" és "zárt" gömb:

$$B(a, r) = \big\{x \in H : d(x, a) < r\big\}, \quad \text{illetve} \quad \overline{B}(a, r) = \big\{x \in H : d(x, a) \leqslant r\big\}.$$

Az euklideszi térben

$$B(a, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| < r\big\}, \quad \overline{B}(a, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| \leqslant r\big\}.$$

1.3. Definíció (pontsorozat limesze)

Legyen $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}^p$ és $b \in \mathbb{R}^p$. Az (a_n) pontsorozat limesze (limeszpontja) b, avagy az (a_n) pontsorozat b-hez tart, avagy $a_n \to b$, avagy $\lim a_n = b$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left\{\begin{array}{c} \exists n_0 \ \forall n > n_0 \\ \exists n_0 \ \forall n \geqslant n_0 \\ \text{elég nagy } n\text{-re} \\ \text{véges sok } n \text{ kivételével} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} d(a_n, b) < \varepsilon \\ |a_n - b| < \varepsilon \\ a_n \in B(b, \varepsilon) \end{array}\right\}.$$

A pontsorozat konvergens, ha van limesze, illetve divergens, ha nincs.

1.4. Tétel

Legyen

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2p} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}, \quad \dots, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Ezek ekvivalensek:

(a) $\mathbf{a}_n \to \mathbf{b}$

(b) $|\mathbf{a}_n - \mathbf{b}| \to 0$

(c) mindegyik $1 \leqslant i \leqslant p$-re $a_{n,i} \to b_i$.

1.5. Tétel

- A limeszpont egyértelmű.
- Véges sok elem hozzáadása, elhagyása, a sorozat átrendezése, az elemek véges sokszori ismétlése nem változtatja meg a konvergenciát.
- Konvergens sorozat minden részsorozata is ugyanoda tart.
- Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, és $c, d \in \mathbb{R}$, akkor $(ca_n + db_n) \cdot cA + dB$.

1.6. Definíció (Cauchy-tulajdonság)

Legyen (a_n) pontsorozat valamely (H, d) metrikus térben. Az (a_n) sorozat "Cauchy-tulajdonságú", ha

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n > n_0 \; d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

1.7. Trivialitás

Minden konvergens pontsorozat Cauchy-tulajdonságú.

Bizonyítás. $(\Rightarrow)$: legyen $b = \lim a_n$; $\forall \varepsilon > 0$-ra $d(a_m, a_n) \leqslant d(a_m, b) + f(a_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ VSK.

1.8. Tétel (Cauchy-kritérium)

$\mathbb{R}^p$-ben bármely pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-tulajdonságú.

Bizonyítás. $(\Leftarrow)$: (a_n) Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) koordinátánként Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) koordinátánként konv $\Rightarrow$ (a_n) konv

1.9. Definíció (teljes metrikus tér)

Egy metrikus tér "teljes", ha a térben minden Cauchy-sorozat konvergens.
Pl. Az $\mathbb{R}^p$ euklideszi tér teljes.

1.10. Definíció (korlátos halmaz)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$. A H halmaz "korlátos", ha (ezek ekvivalensek):

- az $\{|x| : x \in K\}$ számhalmaz korlátos, avagy $\exists r \in \mathbb{R}\ H \subset B(0, r)$;
- minden $1 \leqslant i \leqslant p$-re az $\{x_i : x \in K\}$ számsorozat korlátos.

1.11. Definíció (korlátos pontsorozat)

Legyen (a_n) pontsorozat $\mathbb{R}^p$-ben. Az (a_n) sorozat "korlátos", ha (ezek ekvivalensek):

- az $\{a_1, a_2, \ldots\}$ halmaz korlátos;
- az $|a_n|$ számsorozat korlátos, avagy $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n\ |a_n| \leqslant K$
- minden $1 \leqslant i \leqslant p$-re az $(a_{n,i})$ számsorozat korlátos

1.12. Tétel (Bolzano–Weierstrass tétel)

$\mathbb{R}^p$-ben minden korlátos sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.

Bizonyítás. Az egydimenziós Bolzano–Weierstrass tételt alkalmazzuk p-szer.

2. Normák ekvivalenciája véges dimenzióban

Norma, metrika, A $\|.\|_q$ ($q \geqslant 1$) és $\|.\|_\infty$ normák. Hölder- és Minkowski egyenlőtlenség. Véges dimenzióban minden norma ekvivalens. A konvergencia fogalma nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Ellenpélda végtelen dimenzióban. [KG1]

2.1. Definíció (norma)

Az $\|.\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény "norma", ha

- Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|x\| \geqslant 0$;
- $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0^p$;
- Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektor és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$;
- Bármely $x, y \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

2.2. Definíció (L_q-norma)

$0 < q < \infty$ és $x \in \mathbb{R}^p$ esetén legyen

$$\|x\|_q = \left(|x_1|^q + \ldots + |x_p|^q\right)^{1/q},$$

továbbá legyen

$$\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|, \ldots, |x_p|\right).$$

Vegyük észre, hogy $\|x\|_2 = |x|$ és $\|x\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|x\|_q$.

2.3. Megjegyzés

Leggyakrabban az L_1, L_2 és az L_∞ normákat szoktuk használni.

2.4. Megjegyzés

$0 < q < 1$ esetén nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség; pl. 2-dimenzióban

$$\left\|(1,1)\right\|_q = 2^{1/q} > 2 = \left\|(1,0)\right\|_q + \left\|(0,1)\right\|_q.$$

2.5. Tétel (Hölder-egyenlőtlenség)

Ha $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$ és $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, akkor tetszőleges $a_1, \ldots, a_p$ és $b_1, \ldots, b_p$ számokra

$$\|a\|_q \cdot \|b\|_r = \left(|a_1|^q + \ldots + |a_p|^q\right)^{1/q} \cdot \left(|b_1|^r + \ldots + |b_p|^r\right)^{1/r} \geqslant |a_1 b_1| + \ldots + |a_p b_p|.$$

Bizonyítás. Ha a vagy b a nullvektor, akkor mindkét oldal 0, és kész.
Ha $q = 1$ és $r = \infty$, akkor trivi:

$$B.O. = \left(|a_1| + \ldots + |a_p|\right) \cdot \max |b_i| \geqslant J.O.$$

Marad az, ha $1 < q, r < \infty$ és egyik vektor sem 0.

Az egyenlőtlenség homogén; az a és a b vektort is végigoszthatjuk egy-egy számmal, és ekvivalens állítást kapunk. Tehát feltételezhetjük, hogy $\|a\|_q = 1$ és $\|b\|_r = 1$. Írjuk fel a súlyozott számtani-mértanit az $|a_i|^q$ és $|b_i|^r$ számokra $1/q$ és $1/r$ súlyokkal:

$$|a_i b_i| = \left(|a_i|^q\right)^{1/q}\left(|b_i|^r\right)^{1/r} \leqslant \frac{1}{q}|a_i|^q + \frac{1}{r}|b_i|^r;$$

összegezve

$$\sum |a_i b_i| \leqslant \frac{1}{q}\sum |a_i|^q + \frac{1}{r}\sum |b_i|^r = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 = \|a\|_q \cdot \|b\|_r.$$

2.6. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség)

Ha $1 \leqslant q \leqslant \infty$ és $a, b \in \mathbb{R}^p$, akkor

$$\|a+b\|_q \leqslant \|a\|_q + \|b\|_q.$$

Bizonyítás. Három speciális eset:
Ha $q = \infty$, akkor trivi:

$$\|a+b\|_\infty = \max|a_i + b_i| \leqslant \max\left(|a_i| + |b_i|\right) \leqslant \max|a_i| + \max|b_i| = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

Ha $q = 1$, akkor is trivi:

$$\|a+b\|_1 = \sum |a_i + b_i| \leqslant \sum \left(|a_i| + |b_i|\right) = \|a\|_1 + \|b\|_1.$$

Ha $\|a+b\|_q = 0$, akkor is trivi, mert

$$\|a+b\|_q = 0 \leqslant \|a\|_q + \|b\|_q.$$

Az általános esetben $1 < q < \infty$ és $a + b \neq 0$. Legyen $r = \frac{q}{q-1}$ a q *konjugált kitevőpárja*, amelyre $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

$$\|a+b\|_q{}^q = \sum |a_i + b_i|^q = \sum \left(|a_i + b_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}}\right) \leqslant \sum |a_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}} + \sum |b_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}} \overset{\text{Hölder } 2\times}{\leqslant}$$

$$\leqslant \left(\sum |a_i|^q\right)^{1/q}\left(\sum |a_i + b_i|^q\right)^{1/r} + \left(\sum |b_i|^q\right)^{1/q}\left(\sum |a_i + b_i|^q\right)^{1/r} = \left(\|a\|_q + \|b\|_q\right) \cdot \|a+b\|_q{}^{q-1}.$$

Végül leosztunk.

2.7. Következmény

$\|.\|_q$ norma minden $1 \leqslant q \leqslant \infty$ esetén.

2.8. Definíció

Az $\|.\|$ és $\|.\|'$ normák ekvivalensek, ha léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ számok, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektorra

$$c_1|x| \leqslant \|x\| \leqslant c_2|x|.$$

2.9. Példa

Az $|.|$, $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ normák ekvivalensek, mert

$$\frac{1}{\sqrt{p}}|x| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{p} \cdot |x|$$

2.10. Tétel (a normák ekvivalenciája)

$\mathbb{R}^p$-ben bármely $\|.\|$ norma ekvivalens az $|.|$ normával, azaz léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ számok, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektorra
$$c_1|x| \leqslant \|x\| \leqslant c_2|x|.$$

Bizonyítás. A felső becslés: legyenek a koordináta-egységvektorok $e_1, \ldots, e_p$. Ekkor

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \ldots + x_pe_p\| \leqslant \|x_1e_1\| + \ldots + \|x_pe_p\| = |x_1| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x_p| \cdot \|e_p\| \leqslant$$
$$\leqslant |x| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x| \cdot \|e_p\| = \big(\|e_1\| + \ldots + \|e_p\|\big) \cdot |x|,$$

Tehát például $c_2 = \|e_1\| + \ldots + \|e_p\|$ megfelelő.

Az alsó becsléshez tegyük fel indirekt, hogy nincs ilyen c_1. Ezek szerint minden pozitív egészre $c_1 = \frac{1}{n}$ nem jó, vagyis van olyan x_n vektor, amelyre $\|x_n\| < \frac{1}{n}|x_n|$. Az x_n nem lehet a nullvektor, és így a skálázhatóság miatt feltehetjük, hogy $|x_n| = 1$.

Az Bolzano-Weierstrass tétel miatt a korlátos (x_n) sorozatnak van egy konvergens (x_{n_k}) részsorozata. Ennek limeszpontja legyen y. A részsorozat koordinátánként y-hez tart; az abszolútérték definíciója miatt

$$|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |y_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \Big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k,i}\Big)^2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_{n_k,i}^2} = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k}| = \lim_{k\to\infty} 1 = 1.$$

A részsorozatban $|x_{n_k} - y| \to 0$. A már bizonyított felső becslés szerint $0 \leqslant \|x_{n_k} - y\| \leqslant c_2|x_{n_k} - y|$; a rendőr-elv miatt $\|x_{n_k} - y\| \to 0$. Ezek után

$$0 < \|y\| \leqslant \|x_{n_k}\| + \|y - x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} + c_2|y - x_{n_k}| \to 0,$$

ellentmondás.

2.11. Következmény

Véges dimenzióban a pontsorozatok konvergenciája nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Bármelyik normát is használjuk, ugyanazok a sorozatok lesznek konvergensek.

2.12. Példa

Végtelen dimenzióban a különböző normák nem feltétlenül ekvivalensek.

- Legyen $C[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények vektortere. Ezen a téren két lehetséges norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ és $\|f\|_\infty = \max |f|$.

  Vizsgáljuk az $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & x < 1/n \\ 0 & x \geqslant 1/n \end{cases}$ függvényeket. Ezekre $\|f_n\|_1 \to 0$ és $\|f_n\|_\infty = 1$. Az L_1 norma szerint az (f_n) sorozat a konstans 0 függvényhez tart, az L_∞ norma szerint nem tart oda, és nem is Cauchy-sorozat.

- Ugyanezen a téren $\|f\|_2 = \int_0^1 x|f(x)|\,\mathrm{d}x$ és $\|f\|_3 = \int_0^1 (1-x)|f(x)|\,\mathrm{d}x$ két olyan norma, amelyeknek az aránya sem alulról, sem felülről nem korlátos.

3. Nyílt és zárt halmazok

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja. Halmaz belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz, halmaz lezártja. [LTS2, 13–19. o.]

3.1. Definíció

- Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja.
- Halmaz belseje, külseje, határa.
- Nyílt halmaz, zárt halmaz, halmaz lezártja.
- Torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz.

3.2. Példa

- Az egész tér egyszerre nyílt és zárt is.
- Az üres halmaz egyszerre nyílt és zárt is.
- A nyílt gömbök nyílt halmazok.
- A zárt gömbök zárt halmazok.
- Az $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_p, b_p)$ nyílt téglák nyílt halmazok.
- Az $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ zárt téglák zárt halmazok.

3.3. Tétel

- Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha az elemeiből képzett konvergens sorozatok limeszei is elemei.
- Bármely halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementuma zárt.
- Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nyílt.
- Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
- Zárt halmazok tetszőleges rendszerének metszete zárt.
- Véges sok zárt halmaz uniója zárt.

3.4. Példa

- A $B(0, 1/n)$ nyílt gömbök metszete nem nyílt.
- A $\overline{B}(0, 1 - 1/n)$ zárt gömbök uniója nem zárt.

3.5. Definíció

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. Egy $S \subset G$ halmaz "sűrű" G-ben, ha

$$\forall a \in G \quad \forall r > 0 \quad S \cap B(a, r) \neq \varnothing.$$

3.6. Példa

$\mathbb{Q}^p$ és $\mathbb{R}^p \setminus \mathbb{Q}^p$ sűrű.

3.7. Tétel

A belső/külső pont, nyílt halmaz stb. fogalmak nem függnek attól, hogy melyik normát használjuk.

4. Kompakt halmazok

Cantor-metszettétel. Kompakt halmazok. Racionális gömbök, Lindelöf-lemma, Borel tétele. Nemüres kompakt és vele diszjunkt nemüres zárt halmaz távolsága pozitív. [LTS2, 18, 21–24. o.]

4.1. Tétel (Cantor metszettétel)

Ha $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ korlátos, zárt, nemüres halmazok, akkor $\bigcap K_n \neq \emptyset$.

4.2. Példa

A $A_n = \{\mathbf{x} : x_1 \geqslant n\}$ zárt félterek zártak és nemüresek, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, de a metszetük üres.
A $B_n = B(1/n, 1/n)$ gömbök korlátosak és nemüresek, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, de a metszetük üres.

4.3. Definíció (kompaktság)

Egy $K \subset \mathbb{R}^p$ halmaz "kompakt", ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

4.4. Definíció (racionális gömb)

$B(a, r)$ "racionális gömb", ha $a \in \mathbb{Q}^p$ és $r \in \mathbb{Q}$.

4.5. Tétel

Minden nyílt halmaz előáll racionális gömbök uniójaként.

4.6. Lemma (Lindelöf)

Nyílt halmazok tetszőleges G_i $(i \in I)$ rendszeréből kiválasztható egy megszámlálható részrendszer, amelynek uniója ugyanaz, vagyis létezik olyan megszámlálható $J \subset I$ indexhalmaz, hogy

$$\bigcup_{i\in J} G_i = \bigcup_{i\in I} G_i.$$

4.7. Tétel (Borel)

$K \subset \mathbb{R}^p$ akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

4.8. Definíció

Ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ nemüres halmazok, akkor ezek távolsága

$$dist(A, B) = \inf \big\{|a - b| : a \in A, b \in B\big\}.$$

4.9. Tétel

Tegyen $K \subset \mathbb{R}^p$ kompakt és $Z \subset \mathbb{R}$ zárt, egyik sem üres.
(a) Léteznek olyan $a \in K$ és $b \in Z$ pontok, amelyekre $|a - b| = dist(K, Z)$.
(b) Ha K és Z diszjunkt, akkor $dist(K, Z) > 0$.

5. Összefüggő halmazok

Hegymászós feladat; hibás bizonyítás és ellenpélda. Ívszerű összefüggőség és összefüggőség. Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő. Példa összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő halmazra. $\mathbb{R}^p$ összefüggő. $\mathbb{R}^p$-ben az üres halmazon és az egész téren kívül nincs más halmaz, amely egyszerre nyílt és zárt is. [LTS2, 19–21. o.]

5.1. Kérdés (hegymászós feladat)

Két hegymászó az $y = h(x)$ grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol $h : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvény, és $h(0) = h(1) = 0$. Az egyik hegymászó a $(0, 0)$, a másik az $(1, 0)$ pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni, hogy mászás közben minden pillanatban azonos magasságban vannak. Sikerülhet-e ez nekik?
(Avagy: léteznek-e biztosan olyan $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvények, amelyekre $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(1) = g(1)$, és minden $t \in [0, 1]$ pillanatban $h(f(t)) = h(g(t))$?

Hibás bizonyítás arra, hogy a válasz igen.
Példa arra, hogy a válasz nem.

5.2. Definíció (ívszerű összefüggőség)

A $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz ívszerűen összefüggő, ha bármelyik két pontja összeköthető a halmazban folytonos görbével, tehát bármely $a, b \in H$ pontokhoz van olyan $\gamma : [0, 1] \to H$ folytonos görbe, amelyre $\gamma(0) = a$ és $\gamma(1) = b$.

5.3. Definíció (összefüggőség)

A $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz összefüggő, ha

- H nem bontható fel két diszjunkt, nemüres, relatív nyílt halmaz uniójára, vagyis
- Ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmazok, $H \subset A \cup B$ és $H \cap A \cap B = \emptyset$, akkor $H \subset A$ vagy $H \subset B$.

5.4. Megjegyzés

Bármely $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha nem bontható fel két diszjunkt, nemüres nyílt halmaz uiójára, avagy

5.5. Tétel

Ha egy halmaz ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

5.6. Példa

Van olyan halmaz, ami összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő.

5.7. Következmény

$\mathbb{R}^p$ összefüggő.

5.8. Következmény

A teljes téren és az üres halmazon kívül nincs $\mathbb{R}^p$-nek olyan részhalmaza, ami egyszerre nyílt és zárt.

5.9. Tétel

- Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor bármely két pontja összeköthető töröttvonallal.
- Ha egy nyílt halmaz halmaz összefüggő, akkor ívszerűen összefüggő.
- Minden nyílt halmaz ívszerűen összefüggő komponensekre bontható.

5.10. Definíció

Tartomány: nem üres, nyílt, összefüggő halmaz

II. Többváltozós függvények differenciálszámítása

6. Többváltozós függvények folytonossága és határértéke

6.1. Többváltozós függvények határértéke

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények véges és végtelen határértéke valamilyen halmazra szorítkozva. A határérték egyértelmű. Átviteli elv. Példák. [LTS2, 28–31. o.]

6.1. Definíció (p-változós függvény)

$f : H \to \mathbb{R}$ egy p-változós függvény, ha $H \subset \mathbb{R}^p$.

6.2. Definíció (p-változós függvény határértéke)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ p-változós függvény, $A \subset H$, $a \in A'$, $b \in \mathbb{R}$. Az f függvény határértéke az a pontban az A halmazra szorítkozva b, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a,\delta) \cap A \quad \left|f(x) - b\right| < \varepsilon$$

avagy, a b bármely V környezetéhez létezik az a-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b, \qquad \lim_{a,A} f = b$$

Ha A az értelmezési tartomány, akkor nem tesszük hozzá, hgy "az A halmazra szorítkozva".

6.3. Definíció (p-változós függvény végtelen határértéke)

Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ p-változós függvény, $A \subset H$, $a \in A'$, $b \in \mathbb{R}$.
Az f függvény határértéke az a pontban az A halmazra szorítkozva ∞, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a,\delta) \cap A \quad f(x) > K$$

avagy, a ∞ bármely V környezetéhez létezik az a-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{a,A} f = \infty$.

Az f függvény határértéke az a pontban az A halmazra szorítkozva $-\infty$, ha

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \dot{B}(a,\delta) \cap A \quad f(x) < K$$

avagy, a ∞ bármely V környezetéhez létezik az a-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $f(\dot{U} \cap A) \subset V$.

Jele: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.

6.4. Példa

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

6.2. Többváltozós függvények alsó és felső határértéke

Függvény limesz szuperiora és limesz inferiora. $\liminf_{a,A} f = \limsup_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\lim_{a,A} f = \alpha$. $\limsup_{a,A} f = \max\{\lim f(x_n : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a\}$. Átviteli elvek. Határátmenet lim sup-ra és lim inf-re. [KG2]

6.5. Definíció

Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$, a az A halmaz torlódási pontja, és f olyan p-változós, valós értékű függvény, ami valamilyen $r > 0$ esetén értelmes a $\dot{B}(a, r_0) \cap A$ halmazon.
Az f függvény *felső határértéke* avagy *limesz szuperiora* az a pontban, az A halmazra szorítkozva

$$\limsup_{\substack{x\to a\\ a\in A}} f(x) = \overline{\lim_{a,A}} f(x) = \lim_{r\to 0+} \sup f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big) = \inf_{r>0} \sup f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big).$$

Megjegyzés. A $\dot{B}(a,r)\cap A$ biztosan nem üres, mert a torlódási pont. Nagyobb r-hez bővebb $\dot{B}(a,r)\cap A$ és $f\big(\dot{B}(a,r)\cap A\big)$ halmazt kapunk, ezért az $r \mapsto f\big(\dot{B}(a,r)\cap A\big)$ függvény (nem szig.) monoton növekvő. Az értéke (a szuprémum) $+\infty$ is lehet, de ettől még tudunk határértéket venni. A monotonitás miatt a határérték egyenlő az infimummal.
Az f függvény *alsó határértéke* avagy *limesz inferiora* az a pontban, az A halmazra szorítkozva

$$\liminf_{\substack{x\to a\\ a\in A}} f(x) = \underline{\lim_{a,A}} f(x) = \lim_{r\to 0+} \inf f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big) = \sup_{r>0} \inf f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big).$$

6.6. Lemma

1a. Ha $\limsup_{a,A} f > \alpha$, akkor $\forall r>0\ \exists x\in \dot{B}(a,r)\ f(x)>\alpha$.

1b. Ha $\limsup_{a,A} f < \beta$, akkor $\exists r>0\ \ \forall x\in \dot{B}(a,r)\ f(x)<\beta$.

2a. Ha $\liminf_{a,A} f > \alpha$, akkor $\exists r>0\ \ \forall x\in \dot{B}(a,r)\ f(x)>\alpha$.

2b. Ha $\liminf_{a,A} f < \beta$, akkor $\forall r>0\ \exists x\in \dot{B}(a,r)\ f(x)<\beta$.

Bizonyítás. 1a: $\inf_r \sup f\big(\dot{B}(a)\cap A\big) > \alpha$, tehát bármely $r>0$ esetén $\sup f\big(\dot{B}(a)\cap A\big) > \alpha$.
1b: $\inf_r \sup f\big(\dot{B}(a)\cap A\big) < \beta$, tehát van olyan $r>0$, amire $\sup f\big(\dot{B}(a)\cap A\big) < \beta$.
2a,2b ugyanúgy.

6.7. Tétel

$\liminf\limits_{a,A} f \leqslant \limsup\limits_{a,A} f$, és
$\liminf\limits_{a,A} f = \limsup\limits_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$.
Az $\alpha = \pm\infty$ eseteket úgy is lehet írni hogy

- $\lim\limits_{a,A} f = +\infty$ akkor és csak akkor, ha $\liminf\limits_{a,A} f = +\infty$;
- $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$.

Bizonyítás. Az első állítás trivi az 6.5.. definícióból: $\inf f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big) \leqslant \sup f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big)$, majd $r \to 0+$ határátmenet.

1. eset: $\alpha = -\infty$. A 6.6.. lemma matt ha $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$, akkor minden K számhoz van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a,r) \cap A$ esetén $f(x) < K$. Ez pedig éppen annak definíciója, hogy $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.

Megfordítva, ha $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$, akkor minden K számhoz van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a,r) \cap A$ esetén $f(x) < K$. Ekkor viszont $\limsup\limits_{a,A} f \leqslant \sup f(\dot{B}(a,r) \cap A) \leqslant K$. Ez minden K számra igaz, tehát $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$.

2. eset: $\alpha = +\infty$. ugyanúgy, mint az 1. esetben.

3. eset: α véges.

Ha $\liminf\limits_{a,A} f = \limsup\limits_{a,A} f = \alpha$, akkor a 6.6.. lemma matt minden $0 < \varepsilon < \alpha$-hoz van olyan r_1 és r_2, hogy bármely $x \in \dot{B}(a,r_1) \cap A$ esetén $f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$, illetve bármely $x \in \dot{B}(a,r_2) \cap A$ esetén $f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$. Vegyük a két sugár közül a kisebbet: legyen $\delta = \min(r_1, r_2)$. Ekkor tehát bármely $x \in \dot{B}(a,\delta) \cap A$ esetén $\alpha + \varepsilon > f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$; ez viszont éppen annak a definíciója, hogy $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$.

Megfordítva, ha $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a,\delta) \cap A$ esetén $\alpha + \varepsilon > f(x) > \alpha - \varepsilon > 0$; ekkor viszont

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \inf f\big(\dot{B}(a,\delta)\big) \leqslant \liminf_{a,A} f \leqslant \limsup_{a,A} f \leqslant \sup f\big(\dot{B}(a,\delta)\big) \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

Tehát

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \alpha - \varepsilon \leqslant \liminf_{a,A} f \leqslant \limsup_{a,A} f \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

6.8. Tétel

Legyen

$$L = \Big\{ \lim f(x_n) : x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a \Big\} \subset [-\infty, +\infty].$$

Ekkor $\limsup\limits_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \max L$ és $\liminf\limits_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \min L$.

Bizonyítás. Elég a lim sup-ra.

Először azt igazoljuk, hogy $\limsup\limits_{a,A} f \in L$.

1. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = b$ véges. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $b - \frac{1}{n} < f(x_n) < b + \frac{1}{n}$. Ilyen létezik, mert a 6.6.. Lemma 1b miatt minden elég

közeli pontban $f(x_n) < b + \frac{1}{n}$, és a 6.6.. Lemma 1a miatt az elég közeliek között van olyan pont, amelyre $f(x_n) > b - \frac{1}{n}$ is igaz. A rendőr-elv miatt $f(x_n) \to b$, így $b \in L$.

2. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = +\infty$. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $f(x_n) > n$.

3. eset: $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap A$ és $f(x_n) < -n$.

Másodszor, az kell, hogy L-nek nincs $\limsup\limits_{a,A} f$-nél nagyobb eleme. Tegyük fel indirekt, hogy mégis van egy $\beta \in L$, amire $\beta > \limsup\limits_{a,A} f$. A β-hoz van egy $x_n \in A$ sorozat, amely a-hoz tart, $x_n \neq a$ és $f(x_n) \to \beta$. Vegyünk még egy c számot, amire $\limsup\limits_{a,A} f < c < \beta$. A lemma 1b szerint van olyan $r > 0$, hogy $x \in \dot{B}(a, r) \cap A$ esetén $f(x) < c$. Mivel $x_n \to a$, véges sok kivétellel minden x_n ilyen. Tehát véges sok kivétellel $f(x_n) < c$, de ez ellentmond annak, hogy $f(x_n)$ a c-nél nagyobb β-hoz tart.

6.9. Következmény (átviteli elv)

$\lim\limits_{a,A} f = \alpha$ akkor és csak akkor, ha bármely $x_n \in A\backslash\{a\}$ sorozatra, ha $x_n \to a$, akkor $f(x_n) \to \alpha$.

6.10. Tétel

Műveletek...

6.11. Tétel (határátmenet)

Ha valamilyen $r > 0$-re $x \in \dot{B}(a, r) \cap A$ esetén $f(x) \leqslant g(x)$, akkor $\liminf\limits_{a,A} f \leqslant \liminf\limits_{a,A} g$, és $\limsup\limits_{a,A} f \leqslant \limsup\limits_{a,A} g$.

Bizonyítás. Az 6.5.. definícióból triviális.

6.12. Következmény (rendőr- és honvéd/csősz-elvek)

(a) Ha a $\dot{B}(a, r) \cap A$ halmazon $f \leqslant g \leqslant h$ és $\lim\limits_{a,A} f = \lim\limits_{a,A} h = c$, akkor $\lim\limits_{a,A} g = c$.

(b) Ha a $\dot{B}(a, r) \cap A$ halmazon $f \leqslant g$ és $\lim\limits_{a,A} f = \infty$, akkor $\lim\limits_{a,A} g = \infty$.

(c) Ha a $\dot{B}(a, r) \cap A$ halmazon $f \leqslant g$ és $\lim\limits_{a,A} g = -\infty$, akkor $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.

7. Többváltozós függvények folytonossága

Többváltozós függvények folytonossága. Átviteli elv. Folytonos függvény folytonossága részhalmazokon. Szekciófüggvények. Példa olyan függvényre, amelynek minden szkciófüggvénye folytonos, de a függvény nem folytonos. Műveletek. Az elemi függvények folytonossága. Weierstrass-tétel. Heine-tétel. [LTS2, 32–36. o.]

8. Parciális deriváltak

Parciális differenciálhatóság. Példa parciálisan differenciálható, de nem folytonos függvényre. Lokális szélsőértékek. Szélsőértékkeresés a parciális deriváltak nullhelyeinek mekeresésével. Adott körbe írt maximális területű háromszög. [LTS2, 39–43. o.]

9. Többváltozós függvények differenciálása

Lineáris függvény; átírás vektorok skaláris szorzatával és mátrixszorzással. Többváltozós függvény differenciálhatósága. A differenciálhatóságból következik a folytonosság. Érintősík. Egyértelműség. Deriváltvektor, gradiens. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Minden polinomfüggvény és minden racionális tört függvény, továbbá (ha elhagyjuk az ért. tartományok végpontait) minden elemi függvény differenciálható. [LTS2, 45–53. o.]

10. Iránymenti deriváltak. Lagrange-középértéktétel

Iránymenti derivált. Az iránymenti derivált kiszámítása. Lagrange-középértéktétel. Becslés a függvény megváltozására. Ha egy tartományod a derivált 0, akkor a függvény konstans. [LTS2, 53–56. o.]

11. Vektorértékű függvények differenciálása

Vektorértékű függvények. Határérték, folytonosság, átviteli elvek. A határérték létezése és a folytonosság ekvivalens a koordinátafüggvények határértékével, ill. folytonosáágával. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezések. Mátrix alak. Lineáris leképezés normája. Differenciálhatóság. A diff.hatóság ekvivalens azzal, hogy mindegyik koordinátafüggvény differenciálható. Ha differenciálható, akkor folytonos. A derivált egyértelműsége. Jacobi-mátrix. Ha mindegyik parciális létezik egy környezetben és folytonos az egy pontban, akkor a függvény differenciálható. Folytonos differenciálhatóság. Blokkmátrixok. [LTS2, 81–89. o.]

11.1. Definíció (Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések)

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

11.2. Tétel

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}}_{q \times p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

11.3. Definíció (Lineáris leképezés vagy mátrix normája)

$$\|A\| = \sup\left\{ |Ax| : \ |x| = 1 \right\} = \max\left\{ |Ax| : \ |x| = 1 \right\}$$

11.4. Trivialitás

Tetsz. x vektorra $|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|$.

11.5. Tétel

A mátrixnorma tényleg norma:

- $\|A\| \geqslant 0$, és $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$
- $\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$
- $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

Bizonyítás. Az első három triviális.
Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A+B)x| \leqslant |Ax| + |Bx| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

Tehát

$$\|A + B\| = \sup\Big\{\big|(A+B)x\big| : \; |x| = 1\Big\} \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

A $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tér a mátrixnormával egy normált lineáris tér.
(Igazából bármelyik normát használhatnánk, csak ezzel könnyű lesz számolni.)

11.6. Definíció (differenciálhatóság)

$H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Az f függvény differenciálható az a pontban, ha van olyan $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés, amelyre

(a)
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_q$$

(b) Valamilyen vektorértékű $\varepsilon(x)$ függvénnyel

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \qquad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0_q$$

(c) Valamilyen vektorértékű $\varepsilon(x)$ függvénnyel

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \quad \varepsilon \textbf{ folytonos } a\textbf{-ban és } \varepsilon(a) = 0_q$$

Soronként írva,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + \ell_1(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot |x-a| \\ f_2(a) + \ell_2(x-a) + \varepsilon_2(x) \cdot |x-a| \\ \vdots \\ f_q(a) + \ell_q(x-a) + \varepsilon_q(x) \cdot |x-a| \end{pmatrix}$$

f differenciálható
$\Leftrightarrow$ az ε vektorfüggvény folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0_q$
$\Leftrightarrow$ mindegyik ε_j függvény folytonos a-ban és $\varepsilon_j(a) = 0$
$\Leftrightarrow$ mindegyik f_j differenciálható, és a deriváltja az ℓ_j lineáris függvény.

A számértékű függvényeknél láttuk, hogy az $\ell_j(x)$ lineáris függvény egyértelmű, és az együtthatói (ha tetszik, koordinátái) az f_j függvény parciális deriváltjai az a pontban:

$$\ell_j(x) = D_1 f_j(a) \cdot x_1 + D_2 f_j(a) \cdot x_2 + \cdots + D_p f_j(a) \cdot x_p.$$

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

11.7. Definíció (Jacobi-mátrix)

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

Neve: az f leképezés a pontbeli Jacobi-mátrixa; jele $Jf(a)$.

11.8. Definíció

A most már egyértelmű $A(x)$ leképezést hívjuk az f leképezés a-beli deriváltjának, és jelölhetjük így: $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

11.9. Mese

A definícióba beírva ezt a jelölést,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Ezek után a p-változós f' derivált leképezés hova is képez? Hát a $p \cdot q$ dimenziós $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vektortérbe...
Ha valaki szereti a vektor magicet, a Jacobi-mátrixot ilyen vicces szorzat alakokban is írhatja:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix} = \mathrm{grad} \cdot \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_p \end{pmatrix}$$

11.10. Tétel

Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

11.11. Tétel

Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f mindegyik f_j koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és véges az a pontban.

11.12. Tétel

Ha az a pont egy környezetében az f mindegyik f_j koordinátafüggvénye parciálisan differenciálható, és mindegyik $D_i f_j$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor f differenciálható a-ban.

11.13. Definíció

Ha az a pont egy környezetében az f minden pontban differenciálható, és mindegyik $D_i f_j$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy f folytonosan differenciálható az a pontban.

Avagy, a $q \times p$-es mátrix értékű deriváltfüggvény akkor és csak akkor folyt. a-ban, ha minden koordinátafüggvénye, vagyis az összes $D_i f_j(x)$ folyt. a-ban.

11.14. Példa

Legyen $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, pontosabban

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

A parciális deriváltak:

$$D_x f_1(x, y) = e^x \cos y; \qquad D_y f_1(x, y) = -e^x \sin y;$$

$$D_x f_2(x, y) = e^x \sin y; \qquad D_y f_2(x, y) = e^x \cos y.$$

A Jacobi-mátrix az $\binom{a}{b}$ pontban

$$Jf\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.$$

A függvény deriváltja az $\binom{a}{b}$ pontban az

$$f'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^a \cos b \cdot x & - & e^a \sin b \cdot y \\ e^a \sin b \cdot x & + & e^a \cos b \cdot y \end{pmatrix}$$

lineáris leképezés.

11.15. Mese (E)

a differenciálhatóságfogalom közös általánosítása a korábbi deriváltfogalmaknak:

$f:$	$\to \mathbb{R}$	$\to \mathbb{R}^q$
$\mathbb{R} \to$	Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény: $f'(x)$ egy szám (meredekség) vagy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy 1×1-es mátrix	Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ görbe: $f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_q'(t) \end{pmatrix}$ (érintő)vektor; q-dim. (oszlop)vektor ha tetszik, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ lin. fv
$\mathbb{R}^p \to$	Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény: $f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy $\begin{pmatrix} D_1 f(a) & \dots & D_p f(a) \end{pmatrix}$, p-dim. (gradiens)vektor vagy p-dim. sorvektor	Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezés: $f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris fv vagy $\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix}$ $q \times p$-es mátrix

11.16. Mese (Blokkmátrixok, parciális deriváltak)

$$J \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x, y) = J \left(\begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ \hline g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{array} \right) \left(x_1, \dots, x_p \,\middle|\, y_1, \dots, y_q \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} D_{x_1} f_1 & \dots & D_{x_p} f_1 & D_{y_1} f_1 & \dots & D_{y_q} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1} f_r & \dots & D_{x_p} f_r & D_{y_1} f_r & \dots & D_{y_q} f_r \\ \hline D_{x_1} g_1 & \dots & D_{x_p} g_1 & D_{y_1} g_1 & \dots & D_{y_q} g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1} g_s & \dots & D_{x_p} g_s & D_{y_1} g_s & \dots & D_{y_q} g_s \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} D_x f & D_y f \\ \hline D_x g & D_y g \end{array} \right)$$

12. Differenciálási szabályok

Differenciálási szabályok: konstansszoros, összeg. Láncszabály ($\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ és $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ fggvény kompozíciója).

12.1. Trivialitás

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az a pontban és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható a-ban, és

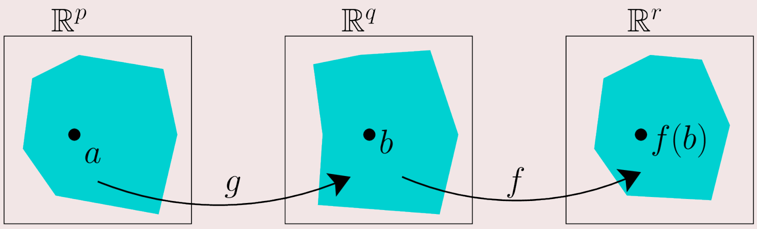
$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

Trivi. Ha $f, g : H \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az a pontban, akkor $f + g$ is differenciálható a-ban, és

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(Trivi az ε függvények folytonosságából.)

12.2. Tétel (láncszabály)



Legyen a p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező g függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban és $g(a) = b \in \mathbb{R}^q$. Továbbá legyen a q-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező f függvény differenciálható a b pontban. Ekkor a p-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező $f \circ g$ függvény is differenciálható az a pontban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \circ g'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a).$$

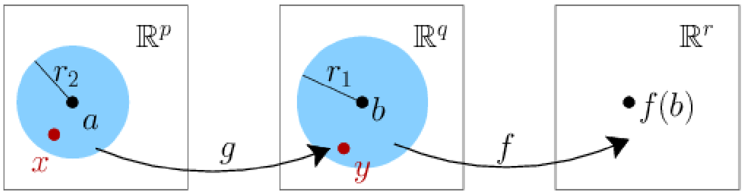
Avagy Jacobi-mátrixokkal

$$\underbrace{J(f \circ g)(a)}_{r \times p} = \underbrace{Jf(b)}_{r \times q} \cdot \underbrace{Jg(a)}_{q \times p} = Jf(g(a)) \cdot Jg(a).$$

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{aligned} A &= g'(a), \quad & g(x) &= g(a) + A(x - a) + \alpha(x)|x - a|, \\ B &= f'(b), \quad & f(y) &= f(b) + B(y - b) + \beta(y)|y - b|, \end{aligned}$$

($\alpha(x)$ q-dim. vektorértékű függvény, folyt. a-ban, $\alpha(a) = 0_q$; $\beta(y)$ r-dim. vektorértékű függvény, folyt. b-ben, $\beta(b) = 0_r$.)



Az f értelmes valamilyen $B(b, r_1)$ gömbben.

A g differenciálható, ezért folytonos is a-ban, így egy elég kis $B(a, r_2)$ gömbben g értelmes és $g(x) \in B(b, r_1)$. Az r_2-t válasszuk olyan kicsinek, hogy $x \in B(a, r_2)$ esetén $|\alpha(x)| < 1$ legyen (ez jól fog jönni még).

Tehát a $B(a,r_2)$ gömbben $f\circ g$ értelmes (ez is kell a differenciálhatósághoz).
A $B(a,r_2)$ gömbben

$$\big|g(x)-g(a)\big| = \big|A(x-a)+\alpha(x)|x-a|\big| \leqslant \big|A(x-a)\big| \ + \ \big|\alpha(x)\big|\cdot|x-a| \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|\cdot|x-a| \ + \ 1\cdot|x-a| = \big(\|A\|+1\big)|x-a|.$$

Mostantól $y=g(x)$. A $B(a,r_2)$ gömbben

$$\big|f(g(x))-f(g(a))-BA(x-a)\big| =$$
$$= \big|f(y)-f(b)-B(y-b)+B(y-b-A(x-a))\big| \leqslant$$
$$\leqslant \big|f(y)-f(b)-B(y-b)\big| \ + \ \big|B(g(x)-g(a)-A(x-a))\big| \leqslant$$
$$\leqslant \big|\beta(y)\big|\cdot|y-b| \ + \ \|B\|\cdot\big|g(x)-g(a)-A(x-a)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \big|\beta(y)\big|\cdot\big(\|A\|+1\big)|x-a| \ + \ \|B\|\cdot\big|\alpha(x)\big|\cdot|x-a| =$$
$$= \Big(\big|\beta(g(x))\big|\cdot\big(\|A\|+1\big) \ + \ \|B\|\cdot\big|\alpha(x)\big|\Big)\cdot|x-a|.$$

Tehát

$$\left|\frac{\big|f(g(x))-f(g(a))-BA(x-a)\big|}{|x-a|}\right| \leqslant \big|\beta(g(x))\big|\cdot\big(\|A\|+1\big) \ + \ \|B\|\cdot\big|\alpha(x)\big|.$$

Rendőr-elv miatt $\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{\big|f(g(x))-f(g(a))-BA(x-a)\big|}{|x-a|}\right| = 0$; $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ differenciálható a-ban, és

$$(f\circ g)'(a) = BA = f'(b)\circ g'(a).$$

12.3. Következmény (összetett függvény differenciálási szabálya; láncszabály)

Ha $g_1,\dots,g_q$ p-változós, számértékű függvények, differenciálhatók az $a\in\mathbb{R}^p$ pontban, $b_j = g_j(a)$, továbbá a q-változós, számértékű f függvény differenciálható a $(b_1,\dots,b_q)$ pontban, akkor az $F(x)=f\big(g_1(x),\dots,g_q(x)\big)$ függvény is differenciálható az a pontban, és a parciális deriváltjait így írhatjuk fel:

$$D_iF(a) = \sum_{j=1}^{q} D_jf(b)\cdot D_ig_j(a) \quad \textbf{avagy} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{q}\frac{\partial F}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel speciális esete $r=1$-re. Jacobi-mátrixokkal

$$\operatorname{grad} F(a) = \big(D_1f(b) \ \ \dots \ \ D_qf(b)\big)\begin{pmatrix} D_1g_1(a) & \dots & D_pg_1(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ D_1g_q(a) & \dots & D_pg_q(a)\end{pmatrix}$$

Ebből kell leolvasni az i-edik elemet, ami a $\operatorname{grad} f(b)$ vektor és a $Jg(a)$ Jacobi-mátrix i-edik oszlopának szorzata.

12.4. Példa

Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

12.5. Példa

Ugyanez hányadossal: most $f(x, y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

$$(g/h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot g'(a) + \frac{-b}{c^2} \cdot h'(a) = \frac{1}{h(a)} \cdot g'(a) - \frac{g(a)}{h(a)^2} \cdot h'(a).$$

Házi feladat kipróbálni ugyanezt n-tényezős szorzattal és hatványozással is.

12.6. Következmény

Differenciálható függvények szorzata és hányadosa is differenciálható (mindenhol, ahol nem kell nullával osztani.)

12.7. Példa

g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez. $\left(|g|^2\right)' =?$

$$f(y) = |y|^2 = y_1^2 + \ldots + y_q^2$$

$$f'(y) = 2y^t$$

$$\left(|g|^2\right)' = 2g^t \cdot g'.$$

12.8. Példa

g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^r)$

$$A'(y) = A \qquad \text{(v.ö. } (e^x)' = e^x \quad \text{:-o)}$$

$$(Ag(x))' = (A(g(x)))' = A \circ g'(x) = Ag'(x).$$

12.9. Példa

g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $v \in \mathbb{R}^q$

$$\langle v, y\rangle' = v^t$$

$$\langle v, g(x)\rangle' = v^t g'(x).$$

12.10. Példa

Most legyen g és h két, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, ami differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és legyen $f(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q) = x_1 y_1 + \cdots + x_q y_q$ az $\mathbb{R}^q$-beli skaláris szorzás.

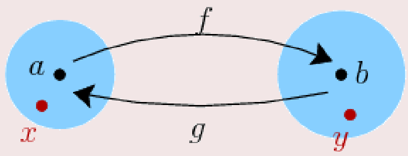
$$\operatorname{grad} f = (y_1, \ldots, y_q,\ x_1, \ldots, x_q) = (y^t, x^t)$$

$$\langle g, h \rangle' = h^t g' + g^t h'$$

(Ha g egyváltozós, akkor ... $= \langle \operatorname{grad} g, h \rangle + \langle h, \operatorname{grad} g \rangle$.

12.11. Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya)

Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és tegyük fel, hogy $f'(a) = A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A\,(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Bizonyítás. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Az $\varepsilon(x) = \varepsilon(g)(y))$ folytonos b-ben; ha $|y - b|$ elég kicsi: $\|A^{-1}\| \cdot \big|\varepsilon(x)\big| < \frac{1}{2}$

$$\big|A^{-1}(y - b)\big| \geqslant |x - a| - \big|A^{-1}\varepsilon(x)\big| \cdot |x - a| \geqslant \Big(1 - \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)|\Big)|x - a| \geqslant \tfrac{1}{2}|x - a|$$

$$\big|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\big| = \big|x - a - A^{-1}(y - b)\big| = \big|A^{-1}\varepsilon(x)\big| \cdot |x - a| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{-1}\| \cdot \big|\varepsilon(x)\big| \cdot 2\big|A^{-1}(y - b)\big| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \big|\varepsilon(x)\big| \cdot 2\|A^{-1}\| \cdot |y - b|.$$

$$\frac{\Big|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\Big|}{|y - b|} \leqslant 2\|A^{-1}\|^2 \cdot \big|\varepsilon(g(y))\big| \to 0.$$

12.12. Kérdés

> "f egy p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.
>
> Ha van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$..."

Hogyan lehet egyszerűen eldönteni, vagy tudunk-e rá valami egyszerű elégséges feltételt, hogy van-e ilyen lokális inverz g függvény?

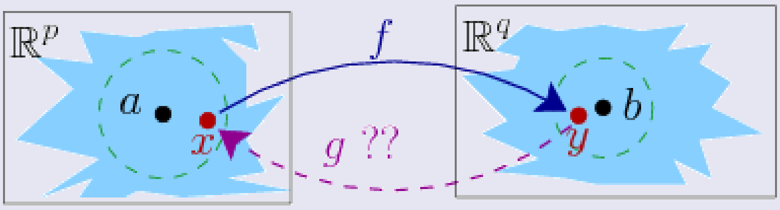
13. Lokális injektivitás

13.1. Kérdés (Lokális inverz függvény)

Mit várjunk el a lokális inverztől?
Lokális inverz?
Lokális injektivitás?
Lokális szürjektivitás?
Milyen tulajdonságú legyen az $f'(a)$ lineáris leképezés?

13.2. Definíció (lokális inverz)

Legyen $f(x)$ p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, folytonos az $a \in \operatorname{int} D_f$ pontban.



A $g(y)$ q-változós függvény az f lokális inverze az a pontban, ha léteznek olyan $A \subset D_f$ és $B \subset D_g$ halmazok, amelyekre

- $b \in \operatorname{int} B$,
- $f(x)$ folytonos és injektív az A halmazon
- $g(y)$ folytonos és injektív a B halmazon
- $f|_A$ és $g|_B$ egymás inverze.

13.3. Tétel

Lokális inverz csak $p = q$ esetén létezhet.

(A folytonyos esetben nem bizonyítjuk. Például $p = 3$, $q = 2$ esetén a teljes ötszög gráf beágyazható $\mathbb{R}^3$-ben, de $\mathbb{R}^2$-ben nem, mert nem síkbarajzolható.)

13.4. Trivialitás

Ha f és g egymás lokális inverze az a, illetve a b pontban, és ezekben az pontokban mindkettő differenciálható, akkor az $f'(a)$ és $g'(b)$ leképezések egymás inverzei, és ez csak $p = q$ esetén lehetséges.

13.5. Definíció (lokális injektivitás)

Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény és $a \in \operatorname{int} D_f$. Az f függvény lokálisan injektív az a pontban, ha van olyan $r > 0$, hogy $f|_{B(a,r)}$ injektív.

13.6. Definíció (lokális szürjektivitás)

Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény és $a \in \operatorname{int} D_f$. Az f függvény lokálisan szürjektív az a pontban, ha a minden környrzetének képe tartalmaz b körüli gömböt, vagyis

$$\forall r > 0\ \exists s > 0\ \forall y \in B(b, s)\ \exists x \in B(a, r) f(x) = y.$$

13.7. Tétel (Injektív és szürjektív lineáris leképezések)

Legyen $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vagy $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ $\quad$ $(A = f'(a)$ lesz)

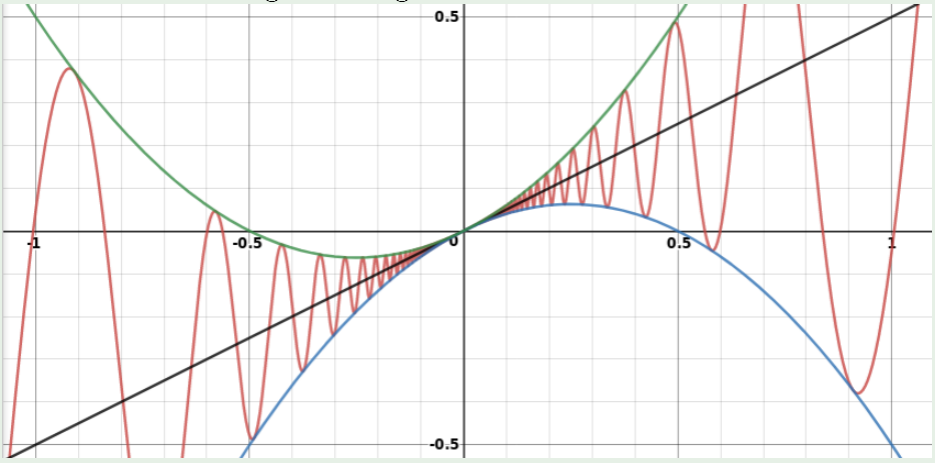
- A injektív $\iff \operatorname{rk} A = p$ $\quad (p \leqslant q$ szükséges) $\iff$ valamelyik $p \times p$-es részmátrix determinánsa nem 0
- A szürjektív $\iff \operatorname{rk} A = q$ $\quad (q \leqslant p$ szükséges) $\iff$ valamelyik $q \times q$-as részmátrix determinánsa nem 0
- A injektív $\iff A^t$ szürjektív
- A invertálható $\iff \operatorname{rk} A = p = q$ avagy $\det A \neq 0$

13.8. Trivialitás

Ha A injektív / szürjektív / invertálható, akkor az A egy környezetében (ez a környezet a $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ térnek része) minden leképezés injektív / szürjektív / invertálható.
Biz. Mindhárom tulajdonság azt mondja, hogy bizonyos részmátrixok közül valamelyiknek a determinánsa nem 0.
A determináns folytonos (mert rac. tört függvény), így van az A-nak egy környezete, ahol ugyanannak a részmátrixnak a determinánsa nem 0.

13.9. Példa

Önmagában a differenciálhatóság nem elég.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \dfrac{10}{x} - 10 \cos \dfrac{10}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

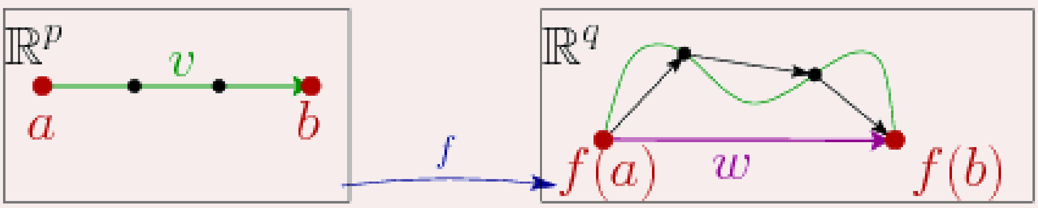
Noha $f'(0) \neq 0$, még sincs lokális inverz a 0 körül. :-(

A folytonos differenciálhatóságot is ki fogjuk kötni.

13.10. Lemma

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; az $[a, b]$ szakasz része H-nek, a szakasz pontjaiban f differenciálható, és valamilyen M számmal $\|f'\| \leqslant M$. Ekkor

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant M \cdot |b - a|.$$



Bizonyítás. Ha $f(a) = f(b)$, az állítás triviális. A továbbiabkan $f(a) \neq f(b)$.
Legyen $w = f(b) - f(a)$ és $h(x) = \langle w, f(x)\rangle >= w^t f(x)$. Erre a függvényre

$$h(b) - h(a) = \langle w, f(b)\rangle - \langle w, f(a)\rangle = \langle w, f(b) - f(a)\rangle = \left|f(b) - f(a)\right|^2.$$

Ahol f differenciálható, ott h is differenciálható, és $h'(x) = w^t f'(x)$.

A p-változós Lagrange-középértéktétel szerint az $[a, b]$ szakaszon van olyan c pont, amelyre $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.

$$\left|f(b) - f(a)\right|^2 = \left|h(b) - h(a)\right| = \left|h'(c)(b - a)\right| = \left|w^t \cdot f'(c) \cdot (b - a)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |w| \cdot \left|(f'(c)\ (b - a)\right| \leqslant |w| \cdot \left\|f'(c)\right\| \cdot |b - a| \leqslant \left|f(b) - f(a)\right| \cdot M \leqslant |b - a|.$$

13.11. Lemma

Legyen $K \subset \mathbb{R}^p$ konvex nyílt halmaz és $f : H \to \mathbb{R}^p$ olyan differenciálható leképezés, amelyre a K minden pontjában $\|f' - I\| \leqslant \frac{1}{2}$. Ekkor a K tetszőleges u, v pontjaira

$$|f(u) - f(v)| \geqslant \frac{1}{2}|u - v|.$$

Bizonyítás. Legyen $g(x) = f(x) - x$, ekkor $x = f(x) - g(x)$, $g' = f' - I$ és a feltétel szerint $\|g'\| \leqslant \frac{1}{2}$. Az előző lemmából $\|g(u) - g(v)| \leqslant \frac{1}{2}|u - v|$, ezért

$$|u - v| = \big|f(u) - g(u) - f(v) + g(v)\big| \leqslant \big|f(u) - f(v)\big| + \big|g(u) - g(v)\big| \leqslant \big|f(u) - f(v)\big| + \frac{1}{2}|u - v|.$$

13.12. Tétel (A lokális injektivitás tétele)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és
az $f'(a)$ lineáris leképezés injektív,

akkor az a pontnak van egy olyan környezete, ahol f injektív.

Bizonyítás. Legyen $A = J(a)$; ez egy $q \times p$-es mátrix, amelynek oszlopai lineárisan függetlenek. Ezért van olyan $p \times q$ méretű mátrix, amelyre $BA = I$.

Legyen $g = B \circ f$; ez is folytonosan differenciálható az a pontban, tehát az $g'(x)$ (leképezés értékű leképezés) folytonos az a pontban; létezik tehát olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r)$ környezetben

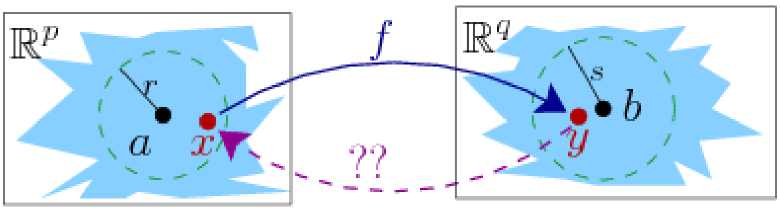
$$|g'(x) - g'(a)| = |g'(x) - I| < \frac{1}{2}.$$

Az előző lemma szerint, ha a, v két különböző pont ebben a gömbben, akkor

$$\big|g(u) - g(v)\big| \geqslant \frac{1}{2}|u - v| > 0,$$

ezért a gömbön f injektív.

14. Lokális szürjektivitás



14.1. Tétel (lokális szürjektivitás)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$ és $b = f(a)$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés szürjektív, akkor az f függvény lokálisan szürjektív az a pontban, tehát az a pont bármely környezetének f szerinti képe tartalmazza a b pont egy környezetét.
Kvantorokkal:

$$\forall\, r > 0 \quad \exists\, s > 0 \quad \forall\, y \in B(b, s) \quad \exists\, x \in B(a, r) \;\; f(x) = y.$$

Bizonyítás. A $Jf(a)$ Jacobi-mátrix oszlopai között van q lin. független; az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez az első q oszlop.

Csak olyan x-eket fogunk keresni, amelyekben $x_{q+1} = a_{q+1}, \dots x_p = a_p$. Mostantól tehát felteszzük, hogy $p = q$; és $f'(a)$ invertálható.

Az f helyett vizsgálhatnánk az $f(x + a) - b$ függvényt; ezért az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a = b = 0_p$.

Legyen $g = A^{-1} \circ f$; ez is folytonosan differenciálható és $g'(0) = A^{-1}A = I$. A folytonos differenciálhatóság miatt van egy olyan $r_0 > 0$, hogy a $B(0, r_0)$ gömbben $|g' - I| \leqslant \frac{1}{2}$.

Az állítást $r < r_0$-ra igazoljuk, és ez elég. Legyen $s = \dfrac{r}{4\|A^{-1}\|}$ és y tetszőleges pont a $B(0, s)$ gömbben; ehhez keressük a megfelelő x-et.

Legyen $z = A^{-1}y$, erre tehát $|y| < s$, és

$$|z| = \left|A^{-1}y\right| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot |y| <\leqslant \|A^{-1}\| \cdot s = \frac{r}{4}.$$

Oyan $x \in B(0, r)$ pontra van szükségünk, amelyre $g(x) = z$, mert akkor $f(x) = A(g(x)) = Az = y$. Az x megtalálása kétféle módszert mutatunk.

1. módszer: minimumkeresés. Keressük meg a $\overline{B}(a, r_0)$ zárt gömbön a $h(x) = |g(x) - z|^2$ függvény minimumát. A Weierstrass-tétel miatt a minimum biztosan létezik.

A középpontban $h(a) = |-z|^2 < s^2$.

A határpontokban

$$|g(x) - z| = \left|(g(x) - g(0)) - z\right|\frac{1}{2} \geqslant |x - 0| - |z| > \frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4},$$

tehát $h(x) > h(0)$. A minimumhely nem lehet a határon; belső pontban veszi fel a h függvény.

Legyen x_0 a minimumhely; ez lokális minimumhely, tehát $h' = 0$:

$$0 = h'(x_0) = 2\big(g(x_0) - z\big)^t \cdot g'(x_0) = 0.$$

Az $g'(x_0)$ invertálható, tehát $g(x_0) - z = 0$.

Ezzel találtunk olyan $x_0 \in B(a, r_0) \subset B(a, r)$ pontot, amire $g(x_0) = z$, vagyis $f(x_0) = y$.

2. módszer: iteráció.

Heurisztika: A keresett x_0 pont közelében

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \approx z + I(x - x_0) = z + x - x_0,$$

vagyis $x_0 \approx x - g(x) + z$.

Legyen $k(x) = x - g(z) + z$, és definiáljuk a következő rekurzív sorozatot:

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = h(u_n) = u_n - g(u_n) + z.$$

A sorozat nem lép ki a $B(0, r)$ gömbből: $\|k'\| = \|I - g'\| \leqslant \frac{1}{2}$ és $k(0) = z$, ezért

$$|k(x)| = |k(0)| + |k(x) - k(0)| \leqslant |z| + \frac{1}{2}|x| < \frac{r}{4} + \frac{r}{2} = \frac{3}{4}r < r;$$

a rekurzió tényleg egy végtelen sorozatot definiál.

A szomszédos elemek távolsága exponenciálisan csökken:

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|k(u_{n+1}) - k(u_n)\right| \leqslant \frac{1}{2}]u_{n+1} - u_n|.$$

Ezért a sorozat konvergens.

Legyen $x_0 = \operatorname{Im} u_n$; ez a k függvénynek fixpontja, vagyis $g(x_0) = z$.

2a. módszer: A Brouwer-fixponttételt fogjuk alkalmazni: ha Z zárt gömb, és $k : B \to B$ egy tetszőleges folytonos függvény, akkor a k függvénynek van fixpontja. Az f és a g függvényekről csak annyit fogunk felhasználni, hogy folytonosak az a pont egy környezetében, differenciálhatók az a pontban, és $A = f'(a)$ szürjektív, illetve $g'(a) = I$. Tehát csak az a-beli deriváltat fogjuk használni.

Az előző részhez hasonlóan, legyen r_0 olyan, amelyre $x \in B(a, r)$ esetén

$$\big|g(x) - g(0) - g'(0)(x - 0)\big| = \big|g(x) - x\big| < \frac{1}{2}|x|;$$

ilyen a g függvény 0-beli differenciálhatósága miatt létezik.

Tetszőleges $r < r_0$ esetén legyen $s = \frac{r}{2\|A^{-1}\|}$; azt állítjuk, hogy tetszőleges $y \in B(0, s)$ ponthoz van olyan $x \in B(0, r)$, amelyre $f(x) = y$, avagy a $z = A^{-1}(y)$ ponttal $g(x) = z$.

Vizsgáljuk a $k(x) = x - g(x) + z$ függvényt a $\overline{B}(0, r)$ zárt gömbön. Ez folytonos, és $|k(x)| \leqslant |g(x) - x| + |z| < \frac{1}{2}|x| + |z| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2}$, tehát a k függvény a gömb belsejébe képez. A Brouwer-fixponttétel szerint k-nak van legalább egy x_0 fixpontja a zárt gömbben; mivel a k képei a gömb belsejében vannak, az x_0 is belső pont. Tehát $x_0 \in B(0, r)$ és $k(x_0) = x_0$, vagyis $g(x_0) = z$.

14.2. Tétel (lokális szürjektivitás, erősebb változat)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$ és $b = f(a)$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonos az a pont egy környezetében, differenciálható az a pontban, és az $f'(a)$ lineáris leképezés szürjektív, akkor az f függvény lokálisan szürjektív az a pontban.

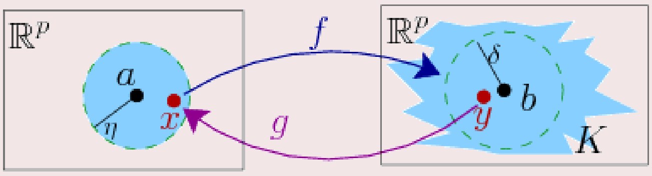
15. Inverzfüggvénytétel

15.1. Definíció (Nyílt leképezések)

Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^q$, és minden $G \subset H$ halmazra a $f(G)$ halmaz nyílt, akkor f egy nyílt leképezés.

Következménynyílt leképezés tétele Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható, és H minden pontjában f' szürjektív, akkor f nyílt leképezés.

15.2. Tétel (Inverzfüggvénytétel)



Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^p$; $a \in \operatorname{int} H$, $b = f(a)$.
Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható az a pontban, és
az $f'(a)$ lineáris leképezés invertálható,

akkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(y, \delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$ pont, amelyre $f(x) = y$.
Avagy, létezik olyan $g : B(b, \delta) \to B(a, \eta)$ függvény, amelyre $f(g(y)) = y$.

(2) Az g függvény differenciálható, és g' folytonos b-ben.

(3) A $B(a, \eta)$ gömb pontjaiban f' invertálható, és $g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$.

Bizonyítás. Olyan kicsi η-t választunk, amelyre a $\overline{B}(a, \eta)$ zárt gömbön f injektív, és f' a zárt gömb minden pontjában invertálható. Legyen $K = f(B(a, \eta)$.
Lokális szürjektivitás: van olyan δ, hogy $B(b, \delta) \subset f(B(a, \eta)$. (nyílt gömbök)
Minden $y \in K$-hoz van pontosan egy olyan $x \in B(a, \eta)$, amire $f(x) = y$. Ha $y \in B(b, \delta)$, akkor $x \in B(a, \eta)$. Tehát g létezik.

Az $\overline{B}(a, \eta)$ zárt gömb kompakt, f folytonos, ezért K is kompakt. A g függvény az f folytonos injektív függvény inverze, ezért g a K halmazon folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabályát fogjuk alkalmazni. Bármely $y \in B(b, \delta)$ pont egy kis környezetében g értelmezett, g folytonos, az $x = g(y) \in B(a, \eta)$ pontban $f'(a)$ invertálható, és $f(g(y)) = y$. Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint g differenciálható y-ban, és $g'(y) = (f'(x))^{-1}$.

A g' folytonos b-ben: $g'(y) = \Big(f'\big(g(y)\big)\Big)^{-1}$, g folytonos y-ban, f' folytonos $g(y) = x$-ben, és a mátrixinverz is folytonos.

16. Implicitfüggvény-tétel

16.1. Mese

Függvény explicit (közvetlen) megadása: $g : (x_1, \dots, x_p) \to (y_1, \dots, y_q)$

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_p) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

vagy

$$y = g(x)$$

Implicit (közvetett) megadás: $g : (x_1, \dots, x_p) \to (y_1, \dots, y_q)$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ f_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \end{aligned}$$

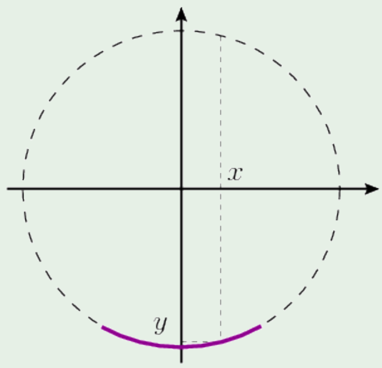
vagy

$$f(x, y) = 0_q$$

(egyenletrendszer)

16.2. Példa (implicit függvény)

Implicit megadás: $x^2 + y^2 = 1$, $|x| < \frac{1}{2}$, $y < 0$
Explicit megadás: $|x| < \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.



Bonyolultabb egyenleteket nem biztos, hogy expliciten meg tudunk oldani. (Ez az algebristák dolga lenne.) Viszont az olyan esetekben is szeretnénk az implciten megadott függvényt deriválni, amikor nincs explicit megoldás.

16.3. Kérdés

Honnan tudjuk, hogy egyáltalán van megoldása az egyenletrendszernek? Na és ha több is van, melyiket vegyük?

16.4. Kérdés

Ha tudunk egy (a,b) pontpárt, ami megoldása az egyenletrendszernek, lesz-e körülötte egy egyértelmű lokális megoldás, görbedarab?

16.5. Kérdés

Ha van is lokális implicit függvény, biztosak lehetünk benne, hogy differenciálható? Milyen képlet adja meg a deriváltat?

16.6. Tétel (implicit függvény differenciálása)

Ha tudjuk, hogy van implicit függvény, és még differenciálható is, akkor deriválni már könnyű.

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$x \in \mathbb{R}^p$; $g(x) \in \mathbb{R}^q$; f egy $p+q$ változós, és $\mathbb{R}^q$-ba képez.

Bizonyítás. Most jelentse $D_1 f$ az f első p változó szerinti parciális deriváltját ($D_1 f(x,y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$) és $D_2 f$ az f utolsó q változó szerinti parciális deriváltját ($D_2 f(x,y) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q)$).

Deriváljuk mindkét oldalt:

$$f(x, g(x)) = 0_q$$

$$\underbrace{D_1 f(x, g(x))}_{q\times p} + \underbrace{D_2 f(x, g(x))}_{q\times q} \cdot \underbrace{g'(x)}_{q\times p} = 0_{q\times p}$$

$$D_2 f(x, g(x)) \cdot g'(x) = -D_1 f(x, g(x))$$

És ha $D_2 f(x, g(x))$ invertálható is, akkor

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

Érdemes lesz feltenni, hogy $D_2 f(x, g(x))$ invertálható.

16.7. Tétel (implicitfüggvény-tétel)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ és $f : H \to \mathbb{R}^q$ (az egyenletrendszer).
Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a,b) \in \operatorname{int} H$, és $f(a,b) = 0_q$ (vagyis az (a,b) egy olyan belső pont, amely megoldása az egyenletrendszernek).
Ha f folytonosan differenciálható az (a,b) pontban, és $D_2 f(a,b)$ invertálható, akkor
Léteznek olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$ számok, hogy

(1) Minden $x \in B(a,\delta)$ ponthoz létezik pontosan egy olyan $y = g(x) \in B(b,\eta)$ pont, amelyre $f(x,y) = 0_q$.

(2) Az így definiált $g(x)$ függvény differenciálható a $B(a,\delta)$ gömbben, és

$$g'(x) = -\Big(D_2 f(x, g(x))\Big)^{-1} \cdot D_1 f(x, g(x)).$$

(3) g' folytonos az a pontban.

Bizonyítás. Könnyebb többet bizonyítani. Az egyenletrendszer jobboldalán a 0_q vektor helyére is tegyünk egy $z \in \mathbb{R}^q$ vektort. Az új egyenlet:

$$f(x, y) = z.$$

Azt állítjuk, hogy minden a-hez közeli x és 0_q-hoz közeli z esetén ehhez van egy egyértelmű y ami megoldása.

Denifiáljuk a következő, $p + q$ változós, $\mathbb{R}^{p+q}$-ba képező függvényt:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ \hline f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_q(x,y) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Erre írjuk fel az inverzfüggvénytételt az (a, b) pontban.

Az (a, b) pontban f folytonosan differenciálható és $F(a, b) = (a, 0)$.

Az (a, b) pontbeli derivált blokkmátrix alakban

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} D_1 x|_{x=a} & D_2 x|_{x=a} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0_{p\times q} \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Ez invertálható, mert a jobb alsó sarok invertálható.

Az inverzfüggvénytétel feltételei teljesülnek; F-nek létezik egy lokális inverze az $(a, 0)$ egy környezetében, és a lokális inverz folytonosan differenciálható az $(a, 0)$ pontban.

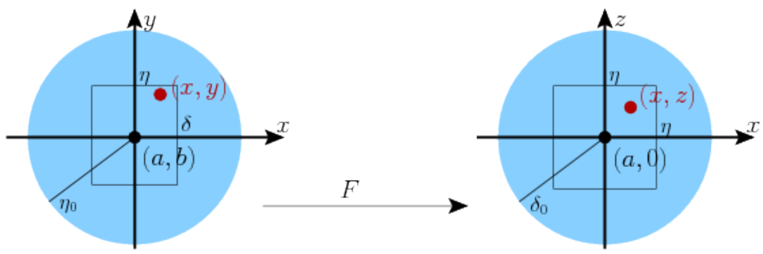
$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvénytétel szerint vannak olyan $\delta_0, \eta_0 > 0$ számok, hogy minden $(x, z) \in B\big((a, 0), \delta_0\big)$ párhoz létezik olyan egyértelmű $(w, y) \in B\big((a, b), \eta_0\big)$ pár, amire $F(w, y) = (x, z)$.

Persze $w = x$, szóval az inverz leképezés $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ G(x,z) \end{pmatrix}$ alakú.

Az óhajtott g függvény a G-nek a $z = 0_q$ szekciója lesz: $g(x) = G(x, 0_q)$. Ez teljesíti az $f(x, g(x)) = 0_q$ függvényegyenletet, és folytonsan differenciálható az a pontban.

(Félre: csak a δ, η számokat ne kellene vagdosni...)



Legyen $\eta = \frac{1}{2}\eta_0$. Válasszunk olyan $0 < \delta \leqslant \delta_0$ számot, hogy minden $x \in B(a, \delta)$ esetén $|g(x)| < \eta$ is teljesüljön.

Ekkor tehát a kicsit nagyobb halmazon is egyértelmű $(x, y) \in B((a, b), \eta_0)$ pontunkra az is igaz, hogy $|y| = |g(x)| < \eta$.

A g deriváltját már kiszámoltuk, de leolvashatjuk a deriváltmátrix inverzéből is:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}; \qquad F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}.$$

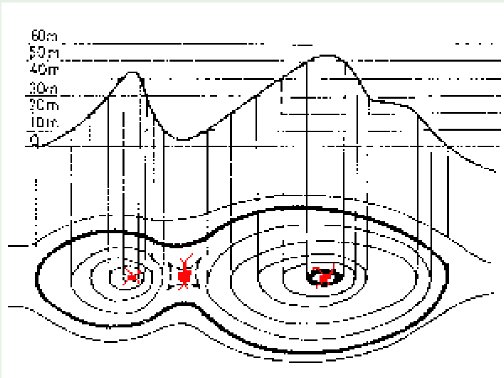
$$\begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0 \\ -\big(D_2 f(x,y)\big)^{-1}\, D_1 f(x,y) & \big(D_2 f(x,y)\big)^{-1} \end{pmatrix};$$

Az első blokkoszlop az x, a második a z szerinti derivált, tehát

$$g'(x) = -\big(D_2 f(x,y)\big)^{-1}\, D_1 f(x,y) = -\big(D_2 f(x,g(x))\big)^{-1}\, D_1 f(x,g(x)).$$

16.8. Mese (Az implicitfüggvény-tétel következményei)

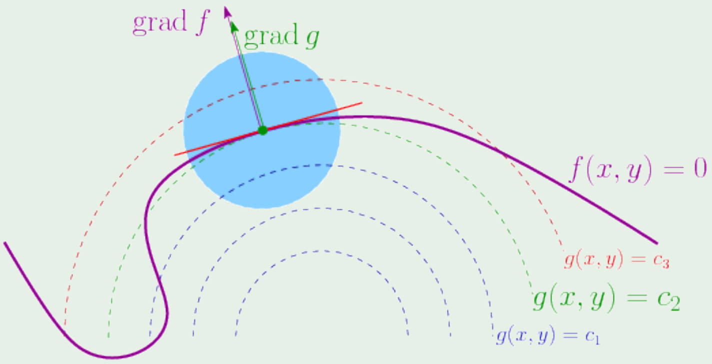
$p+q$ változóra p "független" egyenlet: q-dimenziós grafikondarab (paraméteres felület).
Szintvonalas térképek: ha valahol a függvény folytonsan differenciálható, és a gradiens nem a nullvektor, ott a szintvonal (valamilyen függvényérték őသképe) lokálisan egy folytonosan differenciálható görbedarab.



17. Feltételes lokális szélsőértékek

17.1. Példa

A $g(x,y)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f(x,y) = 0$ görbén. Razoljuk meg a g függvény szintvonalait.



Elképzelésünk szerint az $f(x,y) = 0$ görbe irányában $g(x,y)$ iránymenti deriváltja 0, vagyis a minimumhelyen a görbe és a szintvonal érinti egymást. Az f gradiense a görbére, a g gradiense a szintvonalra merőleges, tehát a két gradiens párhuzamos, egymás konstansszorosa:

$$\operatorname{grad} g = \lambda \cdot \operatorname{grad} f?$$

vagy inkább

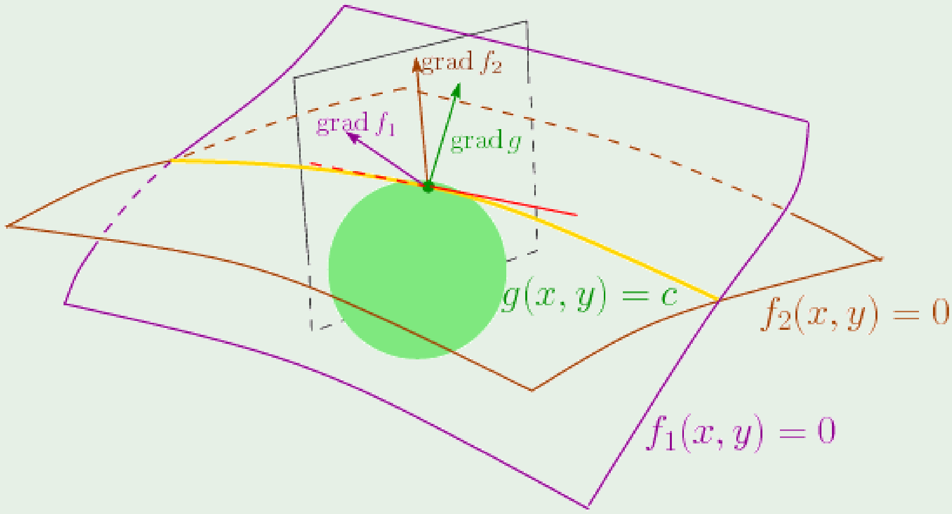
$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f?$$

vagy a biztonság kedvéért

$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \lambda \cdot \operatorname{grad} f?$$

17.2. Példa

A $g(x, y, z)$ függvény minimumát vagy maximumát keressük az $f_1(x, y, z) = 0$ és $f_2(x, y, z) = 0$ felületek metszésvonalán.
Rózsaszínű álmunkban a két felület metszete egy szép, sima görbe. Ehhez megkeressük a g függvény az első olyan szintfelületét, amelynek van közös pontja a metszetgörbével.



Sejtésünk: a görbe "irányában" mindhárom függvény iránymenti deriváltja 0, vagyis mindhárom függvény gradiense a görbére merőleges síkban van.
Ha viszont a három vektor egy síkban van, akkor lineárisan összefüggnek: alkalmas λ_0, λ_1, λ_2, nem mind nulla számokkal

$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2.$$

(Ha tudjuk, hogy grad f_1 és grad f_2 függetlenek, akkor választhatjuk $\lambda_0 = 1$-et.)
A $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ neve: "Lagrange-multiplikátorok"

17.3. Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ (ért.tart.), $f : H \to \mathbb{R}^q$ ("feltétel" vagy "egyenletrendszer"), $g : H \to \mathbb{R}$ ("célfüggvény") és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$.

Azt mondjuk, hogy a g függvénynek feltételes lokális maximuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \leqslant g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális minimuma van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha van olyan $r > 0$, hogy a $B(a, r) \subset H$ környezet bármely x pontjában, amelyre $f(x) = 0$, igaz az, hogy $g(x) \geqslant g(a)$.

A g függvénynek feltételes lokális szélsőértéke van az a pontban az $f = 0$ feltétel mellett, ha a-ban feltételes lokális minimuma vagy feltételes lokális maximuma az $f = 0$ feltétel mellett.

17.4. Tétel (Lagrange féle multiplikátor módszer)

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$, $g : H \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} H$ olyan pont, ahol $f(a) = 0$. Ha f és g folytonosan differenciálható az a pontban, és g-nek lokális szélsőértéke van a-ban az $f = 0$ feltétel mellett, akkor a $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan összefüggőek, avagy vannak olyan $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q$ valós számok, nem mindegyik 0, hogy

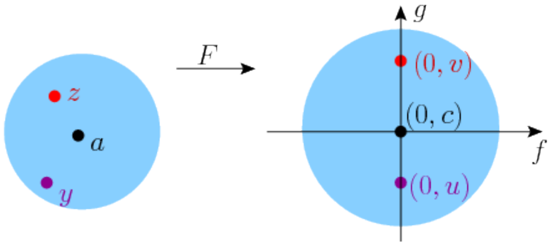
$$\lambda_0 \cdot \operatorname{grad} g(a) = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1(a) + \ldots + \lambda_q \cdot \operatorname{grad} f_1(a).$$

Bizonyítás. Indirekt. Legyen $c = g(a)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{grad} g(a)$, $\operatorname{grad} f_1(a)$, $\dots$, $\operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Legyen

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \qquad JF(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-mátrix sorai lineárisan függetlenek, tehát $F'(a)$ egy szürjektív leképezés. Az F tehát lokálisan szürjektív.

Bármely $r > 0$ esetén $F(B(a,r))$ tartalmazza az $F(a) = (0_q, c)$ pont egy környezetét. Ebben a környezetben van olyan $(0, \dots, 0, u) = F(y)$ pont, ahol $u < c$, és van olyan $(0, \dots, 0, v) = F(z)$ pont is, ahol $v > c$.



Tehát bármilyen $r > 0$-hoz vannak olyan $y, z \in B(a,r)$ pontok, amelyekre $f(y) = f(z) = 0_q$, $g(y) < g(a)$ és $g(z) > g(a)$. Akkor viszont g-nek nincs sem feltételes lokális minimuma, sem feltételes lokális maximuma az a pontban.

17.5. Példa

Számítsuk ki $x + 2y$ miminumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 5$ körön.

Feltétel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5$; célfüggvény: $g(x, y) = x + 2y$.
A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum: ezek egyben feltételes lokális szélsőértékek is.
A Lagrange multiplikátor módszer szerint a feltételes lokális szélsőértékhelyeken $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ és $\operatorname{grad} g = (1, 2)$ egymás konstansszorosa: $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$. Ezt az egyenletrendszert kaptuk:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 5 &= 0; \\ 2x &= \lambda; \\ 2y &= 2\lambda. \end{aligned}$$

Megoldva $\lambda = \pm 2$, $x = \pm 1$, $y \pm 2$.

Tehát két megoldás van: $(x, y) = (1, 2)$ vagy $(x, y) = (-1, -2)$; ezek a gyanús pontok, közöttük van a minimum és a maximum is, meg az is aki csak rosszkor volt rossz helyen.

Behelyettesítve $g(1, 2) = 5$, $g(-1, -2) = -5$. Tehát az $x^2 + y^2 - 5 = 0$ feltétel mellett $x + 2y$ maximuma 5, minimuma -5.

17.6. Példa

Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltétel mellett.

Feltétel: $f_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$; célfüggvény: $g(x, y, z) = xyz$.
A Weierstrass-tétel miatt van minimum és maximum.
Olyan pontokat keresünk, ahol $\operatorname{grad} f_1 = (1, 1, 1)$, $\operatorname{grad} f_2 = (2x, 2y, 2z)$ és $\operatorname{grad} g = (yz, zx, xy)$ linárisan összefüggő.

$$\operatorname{grad} g = \lambda_1 \cdot \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \cdot \operatorname{grad} f_2$$

$$\lambda_0 \cdot (yz, zx, xy) = \lambda_1 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_2 \cdot (2x, 2y, 2z)$$

Ez az egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x + y + z - 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ \lambda_0 \cdot yz &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2x \\ \lambda_0 \cdot zx &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2y \\ \lambda_0 \cdot xy &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 2z. \end{aligned}$$

Vagy helyette

$$\begin{aligned} x + y + z - 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} yz & zx & zy \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Hivatkozások

[LTS1] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis I. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[KG1] K.G.: Normák $\mathbb{R}^p$-ben,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf

[KG2] K.G.: Többváltozós függvények alsó és felső határértéke,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_02_limsup.pdf

[KG3] K.G.: Vektorértékű függvények differenciálása,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_03_VektorErtekuFvek.pdf,
https://www.youtube.com/watch?v=r2nQ87xP5rE

[KG4] K.G.: Inverz- és implicitfüggvény-tétel,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_04_InvImplFv.pdf,
https://www.youtube.com/watch?v=5HiQlIkLhQI

[KG5] K.G.: Analízis 4 jegyzetek
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2019tavasz-an4/Analizis4_Jegyzetek_v18.pdf

[KG6] K.G.: Mágneses örvényerősség és összehurkolódási szám
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_05_OsszeHurka.pdf

[BStv] Biot-Savart törvény, Wikipédia,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Biot-Savart-t%C3%B6rv%C3%A9ny

[Atv] Ampère-törvény, Wikipédia,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Maxwell-egyenletek

[LN] Linking Number, Wikipédia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number