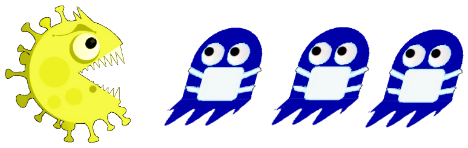
Matematikus KFT ZH, 2021. november 5.



Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Törekedj a rendezett, világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.)

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatok tetszőleges sorrendben kidolgozhatóak.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges.

Semmilyen segédeszköz sem használható, számológép sem.

1. Milyen pontokban differenciálható az $|z|^2 - (2+i)\bar{z}$ függvény?

Megoldás: A $z = x + yi$ koorindátákkal

$$|z|^2 - (2+i)\bar{z} = (x^2+y^2) - (2+i)(x-yi) = \underbrace{(x^2+y^2-2x-y)}_{u(x,y)} + \underbrace{(-x+2y)}_{v(x,y)} i\,.$$

A függvény ott differenciálható, ahol

- differenciálható mint kétváltozós valós függvény (ez igaz, mert polinom),
- és teljesülnek a Cauchy–Riemann egyenletek:

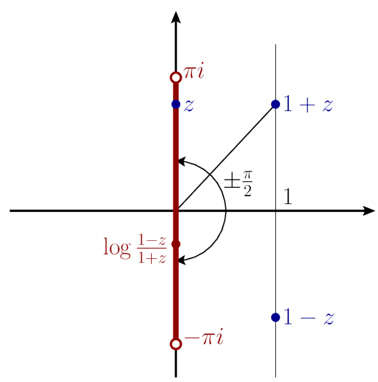
$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Megoldva

$$2x - 2 = 2; \quad 2y - 1 = 1$$
$$x = 2, \quad y = 1.$$

A függvény egyetlen pontban, a $z = x + yi = 2 + i$ pontban differenciálható.

2. Ábrázold a $\left\{ \log \frac{1-z}{1+z} : \ z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z = 0 \right\}$ halmazt. (A log a logaritmus főértékét jelenti.)



Megoldás: Ha az argumentumot a $(-\pi, \pi)$ intervallumból vesszük, akkor a $\operatorname{Re} z = 0$ egyenesen $|1+z| = |1-z|$, $\arg(1+z) = -\arg(1-z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (és ezek az argumentumok mind lehetségesek), ezért $\operatorname{Re}\log\frac{1-z}{1+z} = \left|\frac{1-z}{1+z}\right| = 1$ és $\operatorname{Im}\log\frac{1-z}{1+z} = \arg\dfrac{1-z}{1+z} = -2\arg(1+z) \in (-\pi, \pi)$.

3. Fejtsd hatványsorba az 1 körül az $f(z) = \dfrac{1}{z^2+3z+2}$ függvényt. Mi a hatványsor konvergenciasugara?

Megoldás:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2+(z-1)} - \frac{1}{3+z-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}.$$

Mindkét paricális tört egy-egy mértani sor összege|:

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n, \quad \text{(akkor konvergens, ha } \left|-\tfrac{z-1}{2}\right| < 1, \text{ vagyis } |z-1| < 2\text{)},$$

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n, \quad \text{(akkor konvergens, ha } \left|-\tfrac{z-1}{3}\right| < 1, \text{ vagyis } |z-1| < 3\text{);}$$

a $|z-1| < 2$ körlapon tehát

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

A $|z-1| < 2$ körlapon mindkét sor konvergens, tehát $f(z)$ hatványsora is konvergens. A $2 \le |z-1| < 3$ halmazon az első sor divergens, a második konvergens, tehát az $f(z)$ hatványsora is divergens. Ezért a konvergenciasugár 2.

A konvergenciasugár másképpen: a függvény holomorf a $|z-1| < 2$ körlapon, tehát a konvergenciasugár legalább 2. Másrészt, a $z = -1$ pontban függvénynek pólusa van, ezért a határértéke ∞, emiatt a hatványsor sem lehet konvergens ebben a pontban.

A konvergenciasugár a Cauchy-Hadamard tételből:

$$\frac{1}{2^{n+4}} < |a_n| = \left|\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right| < \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{1/16} < \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2};$$

A rendőr-elvből $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{2}$, $R = 1/\lim\sqrt[n]{|a_n|} = 2$.

4. Van-e primitív függvénye a $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ tartományon ($[-1,1]$ az 1 és -1 pontokat összekötő zárt szakasz) az $f(z) = \dfrac{1}{z^3-z}$ függvénynek?

1. megoldás: Van primitív függvény; ehhez elég igazolni, hogy bármely, a tartományban fekvő $\gamma(t)$ zárt töröttvonal mentén $f(z)$ vonalintegrálja 0.

Legyen $\min|\gamma| = M$, és $K > 0$ esetén $K\gamma$ a töröttvonal K-szoros nagyítása. $I(K) = \int_{K\gamma} f(z)\mathrm{d}z$ egyrészt konstans, mert a tartományunkban $K\gamma$ homotóp γ-val. Másrészt $KM > 2$ esetén

$$|I(K)| \le \max_{K\gamma}|f|\cdot\ell(K\gamma) = \max_{z\in\gamma}\frac{1}{\left|(Kz)^3(1-\frac{1}{(Kz)^2})\right|}K\ell(\gamma) < \frac{2\ell(\gamma)}{K^2M^3} \to 0,$$

ezért $I(K) = 0$, kész.

2. megoldás: Parciális törtekre bontva

$$\frac{1}{z^3-z}=\frac{1/2}{z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1/2}{z+1}.$$

Szemléletesen, a tartományban egy γ zárt görbe ugyanannyiszor kerüli meg az $1,0,-1$ pontokat, ezért

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}n(\gamma,1)-n(\gamma,0)+\frac{1}{2}n(\gamma,-1)=0.$$

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy a tartományban bármely γ rektifikálható zárt görbe ugyanannyiszor kerüli meg az $1,0,-1$ pontokat. Bármely $w\in[-1,1]$-re az $n(\gamma,w)$ görbeindex egész szám, másrészt a $w\mapsto\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-w}$ paraméteres integrál a w-nek folytonos függvénye. Ha pedig egész értékű és folytonos, akkor konstans.

5. Igazold, hogy ha f és g holomorf ugyanazon a D tartományon, és $\big|f(z)\big|=\big|g(z)\big|$, akkor egy alkalmas c komplex számmal $g(z)=c\cdot f(z)$.

Megoldás: Ha f és a g is a konstans 0 akkor bármilyen c megfelel.

Ha f nem a konstans 0, akkor az unicitástétel miatt van olyan K kör, ahol f értéke nem 0. A $h(z)=g(z)/f(z)$ függvény a K körben egységnyi, tehát $|h|$-nak lokális maximuma van; akkor viszont a maximum elv miatt h konstans; legyen c ez az érték.

Legyen most $H(z)=g(z)-c\cdot f(z)$; ez a K körben konstans 0, de akkor az unicitástétel miatt a teljes tartományon konstans 0, vagyis $g=cf$.

6. Az f egészfüggvényre tetszőleges n pozitív egész esetén $\operatorname{Re} f\left(\frac{1}{n^2}\right)=\cos\frac{1}{n}$. Mi lehet $\operatorname{Re} f(-1)$?

Megoldás: Legyen

$$g(z)=\frac{f(z)+\overline{f(\overline{z})}}{2}\quad\text{és}\quad h(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^k.$$

A $z=1/n^2$ pontokban

$$g\left(\frac{1}{n^2}\right)=\operatorname{Re} f\left(\frac{1}{n^2}\right)=\cos\frac{1}{n}=h\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ezek a pontok torlódnak a 0-ban, így az unicitástétel miatt $g=h$. A $z=-1$ pontban

$$\operatorname{Re} f(-1)=g(-1)=h(-1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}=\frac{e+1/e}{2}.$$

7. Az f függvény holomorf a $|z|<1+\varepsilon$ egységkörlemezen, $|a|<1$, és az egységkörvonalon $\big|f(z)\big|<\frac{1}{|z-a|}$. Igazold, hogy $\big|f(a)\big|<\frac{1}{1-|a|^2}$.

Megoldás: Cauchy-formula az egységkörvonalra és az a pontra, majd háromszög-egyenlőtleség:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z;$$

$$\big|f(a)\big| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{|f(z)|}{|z-a|} |\mathrm{d}z| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{|z-a|}}{|z-a|} |\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1}{|z-a|^2} |\mathrm{d}z|.$$

Ezt visszaírjuk komplex vomnalintegrállá a $\mathrm{d}z = iz\mathrm{d}z$ helyettesítéssel:

$$\big|f(a)\big| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{1-\bar{a}z}}{z-a} \mathrm{d}z;$$

végül újra Cauchy-formula a $g(z) = \frac{1}{1-\bar{a}z}$ függvényre:

$$\big|f(a)\big| \le \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{1-\bar{a}z}}{z-a} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z-a} \mathrm{d}z = g(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

Megjegyzés: A feladat állítása éles, az $f(z) = \frac{1}{1-\bar{a}z}$ függvényre egyenlőség van: a körvonalon $|f(z)| = \frac{1}{|1-\bar{a}z|} = \frac{1}{|z\bar{z}-\bar{a}z|} = \frac{1}{|\bar{z}-\bar{a}|} = \frac{1}{|z-a|}$, és $|f(a)| = \frac{1}{1-|a|^2}$.