

# Matematikus KFT ZH, 2021. december 10.



Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Törekedj a rendezett, világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.)

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatok tetszőleges sorrendben kidolgozhatóak.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontoszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontoszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges.

Semmilyen segédeszköz sem használható, számológép sem.

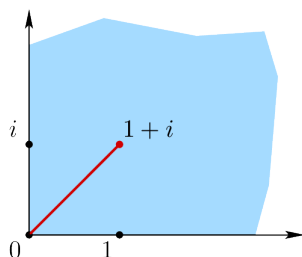
1. Fejtsd Laurent-sorba a  $\frac{z^3 + 2}{z^2 - 4}$  függvényt az 1 körül, az  $1 < |z - 1| < 3$  halmazon.

2. Hány gyöke van (multiplicitással számolva) az

$$\frac{18z + 1}{5z + 13} = z^3$$

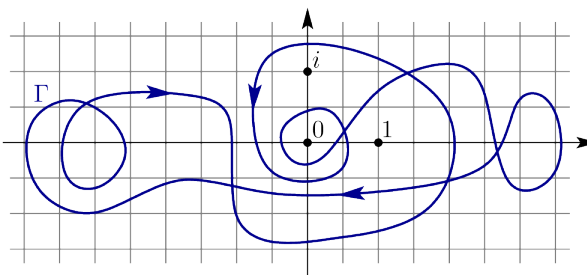
egyenletnek az  $1 < |z| < 3$  tartományon?

3. Adj meg konform megfeleltetést (képletet) az ábrán látható bevágott negyedsíkról és az egységkörre.



4. Legyen  $\Gamma$  az ábrán látható görbe.

$$\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{tg} z}{(z^2 + 1)^2} dz = ?$$



5. A reziduúmtétel segítségével igazold, hogy

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

6. Legyen  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  a komplex egységkörlemez, és legyen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  olyan holomorf függvény, amire  $f(\frac{1}{2}) = 1$  és  $f(-\frac{1}{2}) = -1$ . Mutasd meg, hogy

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \geq 2.$$

7. Legyen  $D = \{z : 0 < |z| < 1\}$  a kilyukasztott egységkörlemez. Bizonyítsd be, hogy ha  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  harmonikus, akkor van olyan holomorf  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  függvény és  $c \in \mathbb{R}$  valós szám, amelyekre  $u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c \cdot \log |z|$ .