

Matematikus KFT javító ZH, 2021. december 17.

A javító ZH a rosszabbul sikerült ZH-t helyettesítheti, tehát a három dolgozat közül a két magasabb pontszámú számít.

Minden beadott lapra írd rá a nevedet.

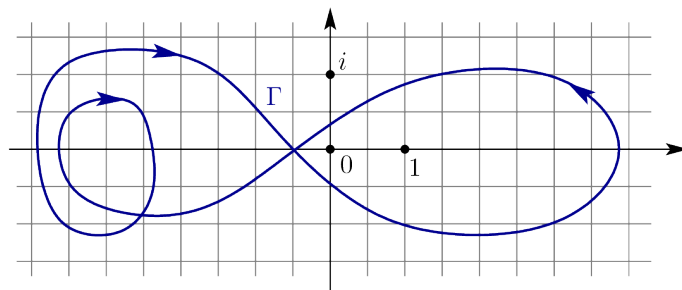
Törekedj a rendezett, áttekinthető, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, *amit magyarázni is tudok és tudsz.*

Ha ebben a félévben tanult tételt használ fel, írd oda, hogy melyik az a tétel, és milyen objektumokra alkalmazod.

1. Fejtsd Laurent-sorba az $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ függvényt az $1 < |z-1| < 2$ tartományon.

2.

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 \cdot \cos z} = ?$$



3. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges a komplex szám és $n > 1$ egész esetén az $az^n + 3z + 1$ polinomnak van gyöke az egységkör belsejében.

4. Ábrázold a $\left\{ \sin z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$ halmazt.

5.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^4 + 1} dx = ?$$

6. Igazold, hogy ha $f(z)$ egészfüggvény, és az $|z| = 1$ egységkörvonal végtelen sok pontjában $\operatorname{Re} f(z) = 0$, akkor f konstans.

7. Írj fel olyan $\varphi(z)$ racionális tört függvényt, ami konform leképezés az $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ negyedkörtől az $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ negyedsíkra úgy, hogy $\varphi(1) = 1$.