## 1. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. szeptember 15.

**1.1.** Legyen $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (Zsukovszkij-leképezés).

(a) Hova képezi ez a függvény az egységkörvonalat?

(b) Mutassuk meg, hogy a 0 középpontú, nem egységnyi sugarú körök képei $1, -1$ fókuszú ellipszisek.

(c) Mutassuk meg, hogy a 0-n átmenő, a tengelyektől különböző egyenesek képei $1, -1$ fókuszú hiperbolák.

(d) Igazoljuk a Zsukovszkij-függvény és a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy az $1, -1$ fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

**1.2.** Írjuk fel azokat az $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $u(x, y) + v(x, y) \cdot i = (x + yi)^3$, és ellenőrizzük a Cauchy-Riemann egyenleteket.

**1.3.** Mik azok a komplex számok, ahol az $\mathrm{Im}^2\, z + \mathrm{Re}\, z + \overline{z}$ függvény differenciálható?

**1.4.** Keressünk olyan $v(x, y) : R^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényt (ha van), melyre az $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ függvény "egészfüggvény", vagyis az egész síkon holomorf, ha

(a) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$;

(b) $u(x, y) = x^2 + y^2$.

**1.5.**

(a) Milyen azonosságokat kaphatunk az $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hatványsor négyzetre emelésével, illetve deriválásával?

(b) Fejtsük hatványsorba a $\dfrac{1}{z^3}$ függvényt az 1 körül.

### Házi feladatok

**1.6.** Legyen $f(z)$ holomorf függvény egy $D \subset \mathbb{C}$ tartományon. Mutasd meg, hogy

(a) Ha $\mathrm{Re}\, f$ konstans, akkor $\mathrm{Im}\, f$ is konstans.

(b) Ha $|f|$ konstans, akkor $f$ is konstans.

**1.7.** Mik azok a komplex számok, ahol az $\mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Re}^2\, z \cdot i + \overline{z}$ függvény differenciálható?

**1.8.** Írd fel az összes olyan $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire

$$f(x + yi) = u(x, y) + (x^2 - y^2)i$$

egészfüggvény.

**1.9.** Milyen pontokban konvergál az $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ hatványsor?

### Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható okt. 3-ig

**PM 1.** Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ olyan hatványsor, anely a $z = 1$ pontban konvergens.

(a) Tegyük fel, hogy $0 < A < \frac{\pi}{2}$, továbbá $w_1, w_2, \ldots$ olyan komplex számok, amelyekre $|w_n| < 1$, $w_n \to 1$ és $\left|\arg(1 - w_n)\right| < A$. Mutassuk meg, hogy $f(w_n) \to f(1)$.

(b) Igaz marad-e ez az állítás akkor, ha a $(w_n)$ sorozatról csak annyit kötünk ki, hogy $|w_n| < 1$ és $w_n \to 1$?