

2. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. szeptember 22.

2.1. Hová képezi az e^z függvény a $1 < \operatorname{Re} z < 2$, $0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ halmazzt?

2.2. Fejtsük hatványsorba a $\log(1+z)$ függvényt (a log a logaritmus főértéke) a 0 körül.

2.3. Számítsuk ki $\log(1+i)$ összes értékét.

2.4. Tekintsük a logaritmusfüggvénynek azt a $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : x \geq 0, y = \sin x\}$ tartományon holomorf ágát, amelyre $\log 1 = 0$. Erre a log függvényre $\log(e^{3/2}) = ?$

2.5. A komplex számsíkot egyetlen ∞ -nel szoktuk kompaktifikálni; $z \rightarrow \infty$ és $|z| \rightarrow \infty$ ugyanazt jelenti. Mi a következő függvények egyenletes határértéke, ha $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$, illetve ha $\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty$? Töltsük ki a táblázatot!

	e^{iz}	e^{-iz}	$\cos z$	$\sin z$	$\operatorname{tg} z$	$\operatorname{ctg} z$
$\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$						
$\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty$						

2.6. Mik a szinuszfüggvény gyökei?

Mi a szinuszfüggvény értékészlete?

2.7. Hova képezi a komplex koszinuszfüggvény

(a) a $[0, \pi/2]$ szakaszt?

(b) A képzetes tengely pozitív felét?

(c) A $\pi/2$ végpontú, felfelé álló függőleges félegyenest?

(d) A $0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$ tartományt?

Házi feladatok

2.8. Van-e valós értéke $(-1)^i$ -nek?

2.9. Mi a komplex tangensfüggvény értékészlete?

2.10. Legyen a $D := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$ tartományon $\log z$ a logaritmus főértéke. Igaz-e, hogy $a, b \in D$ esetén $\log(ab) = \log a + \log b$?

2.11. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ egészfüggvény, és tegyük fel, hogy a 0-beli deriváltakból álló $f^{(n)}(0)$ sorozat konvergens, a határértéke C . Bizonyítsuk be, hogy $f^{(n)}(z) \rightarrow Ce^z$ lokálisan egyenletesen.

(Schweitzer 2018/9. alapján)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható okt. 10-ig

PM 2. Az ábrán látható tartományon a $f(z) = \log \cos z$ függvény értelmezhető úgy, hogy f holomorf, és $f(0) = 0$. Mennyi $f(-\pi)$?

