3. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. szeptember 29.

3.1.

$$(a) \int\limits_{|z|=1} \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} \mathrm{d}z = ?; \qquad (b) \int\limits_{|z|=1} \overline{z} \mathrm{d}z = ?; \qquad (c) \int\limits_{[1,i]} z^2 \mathrm{d}z = ?$$

3.2. Legyen $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$ és $r > 0$.

$$\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n \mathrm{d}z = ?$$

3.3. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon?

$$(a)\ e^{2z},\ \mathbb{C}; \qquad (b)\ e^{z^2},\ \mathbb{C}; \qquad (c)\ z^2 + \frac{1}{z^2},\ \mathbb{C} \setminus \{0\}; \qquad (d)\ z + \frac{1}{z},\ \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

3.4. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Re} z < 0$ esetén

$$\left|1 - e^z\right| < |z|.$$

3.5. (a) Legyen γ egyszerű, zárt, szakaszonként C_1 görbe. Írjuk fel a γ által határolt tartomány területét vonalintegrál alakban.

(b) Legyen $R < \pi$. Számítsuk ki a $D = \left\{e^z : \ |z| < r\right\}$ tartomány területét.

3.6. Igazoljuk, hogy tetszőleges a valós számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{iax} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-a^2/2},$$

avagy haranggörbe Fourier-transzformáltja is haranggörbe. (Alakítsuk a kitevőt teljes négyzetté, és integráljunk egy téglalap kerületén.)

Házi feladatok

3.7.

$$(a) \int\limits_{|z|=1} \frac{1+z+z^2}{z} \mathrm{d}z = ? \qquad (b) \int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} \mathrm{d}z = ?$$

3.8. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon?

$$(a)\ \overline{z},\ \mathbb{C}; \qquad (b)\ \operatorname{Re} z,\ \mathbb{C}; \qquad (c)\ \frac{1}{z},\ \{\operatorname{Re} z > 0\}; \qquad (d)\ \frac{1}{z^3+z},\ \mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\}$$

3.9. Legyen a komplex szám. Alakítsd át egy holomorf függvény komplex vonalintegráljává az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|z - a\right|^2 |\mathrm{d}z|$$

integrált, majd számítsd ki.

3.10. A $p(z)$ polinom gyökei közül k darab az $|z| < r$ kör belsejébe esik, a többi gyök a körön kívül van. Legyen $\gamma(t) = p(re^{it})$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

(a) Hogyan számíthatjuk ki az $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ integrált helyettesítéses integrálással?

(b) Hányszor kerüli meg a γ görbe a 0-t?

(Segítség: bontsd parciális törtekre az $p'(z)/p(z)$ függvényt.)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható okt. 17-ig

PM 3. Legyen $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, ahol $n \geq 1$ és $a_0, \ldots, a_{n-1}$ komplex számok. Integráld a $\dfrac{z^{n-1}}{p(z)}$ függvényt egy nagy körön, és bizonyítsd be, hogy $p(z)$-nek van komplex gyöke.