

4. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. október 6.

4.1.

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z-3} dz =? \quad \int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z-3} dz =? \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z+2)} dz =? \quad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z-2)(z-4)} dz =? \quad \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} dt =?$$

4.2. Van-e primitív függvénye a $\mathbb{C} \setminus \{-i, 0, i\}$ -n az $f(z) = \frac{1}{z^3 + z}$ függvénynek?

4.3. A $p(z)$ legalább másodfokú polinom gyökei az $|z| < \varrho$ kör belsejébe esnek. Legyen tetszőleges $R > |\varrho|$ esetén

$$I(R) = \int_{|z|=R} \frac{dz}{p(z)}.$$

Igazoljuk, hogy (a) $|I(R)| \leq O(1/R)$; (b) $I(R)$ értéke állandó; (c) $I(R) = 0$.

4.4. Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf a $B(0, 1 + \epsilon)$ körlapon.

(a) Deriváljuk a Cauchy-formulát, és írjuk fel $f'(z)$ -t paraméteres vonalintegrál alakban.

(b) Igazoljuk, hogy f akárhányszor differenciálható, és írjuk fel a k -adik deriváltját paraméteres integrál alakban.

4.5.

$$\int_{|z|=2} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n dz =? \quad (n \in \mathbb{Z}, \text{ negatív is lehet!})$$

Házi feladatok

4.6.

$$\int_{|z+2i|=2.5} \frac{1}{z^2+1} dz =? \quad \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z(z+2)} dz =? \quad \int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z(z+2)} dz =?$$

4.7. Alakítsuk egy holomorf függvény vonalintegráljává és számítsuk ki az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z - \frac{1}{2}|^2}$$

integrált.

4.8. Az f függvény holomorf a $|z| < 1 + \epsilon$ körlapon, és az egységkörvonalon $|f| \leq 1$.

(a) Legfeljebb mekkora lehet $|f'(0)|$?

(b) Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható okt. 24-ig

PM4. Legyen D egy sima határú Jordan-tartomány, $0 \notin D$, és tegyük fel, hogy a \sqrt{z} -nek van egy $g(z)$ holomorf ága D -n.

(a) Igazold, hogy a $g(D)$ komplementerében a 0 és a ∞ összeköthető töröttonallal.

(b) Bizonyítsd be, hogy $\log z$ -nek van holomorf ága D -n.