5. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. október 13.

5.1. Legyen α komplex szám. Írjuk fel az $f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$ függvény 0 körüli Taylor-sorát. Mekkora körben állítja elő a függvényt a Taylor-sor?

5.2. Legyen $f(z) = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Ellenőrizzük az együtthatóformulát az $|z| = \frac{1}{2}$ körön: cseréljük ki a kört egy $R > 1$ sugarú körre (közben alkalmazzuk a Cauchy-formulát az 1 pontban) és nézzük meg, hogy mi történik, ha $R \to \infty$.

5.3. Van-e olyan holomorf $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ függvény, amelyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\text{(a) } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}; \qquad \text{(b) } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad \text{(c) } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}; \qquad \text{(d) } \operatorname{Re} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}?$$

5.4. Legyen $\operatorname{Re} s > 1$ esetén

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

A Morera-tétel segítségével igazoljuk, hogy a ζ-függvény holomorf.

5.5. Az $f(z)$, $\overline{f(\bar{z})}$ és $\overline{f(-\bar{z})}$ függvények összehasonlításával igazoljuk, hogy ha az f egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

5.6. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?

Házi feladatok

5.7. $\operatorname{Re} s > 0$ esetén legyen $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \mathrm{d}x$. Mutassuk meg, hogy a Γ-függvény holomorf.

5.8. Az f függvény holomorf az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $[1,2]$ szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutassuk meg, hogy a $[-2,-1]$ szakaszon is csak valós értékei vannak.

Miért nem működik a megoldás az $1 < |z| < 2$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ tartománnyal?

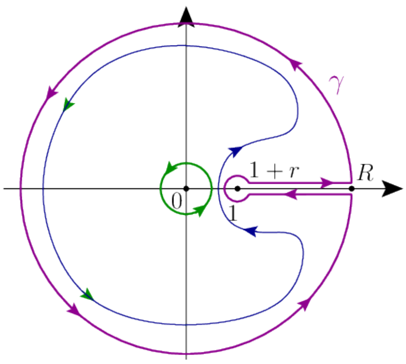
5.9. Az f egészfüggvényre $\arg f(1/n) \equiv \dfrac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg f(2)$?

5.10. *„Az $a_0, a_1, \ldots,$ sorozatban $a_0 = -1$, és tetszőleges $n \geq 1$-re $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{n-k+1} = 0$. Igazoljuk, hogy $n \geq 1$ esetén $a_n > 0$.”*

(IMO Shortlist, 2006/A2)

Oldjuk meg a feladatot komplex függvénytani eszközökkel. Számítsuk ki az $f(z) = \sum a_n z^n$ generátorfüggvényt, írjuk fel az együtthatóformulát egy kis körön, cseréljük ki az integrációs utat az ábrán látható kulcslyukgörbére, és mutassuk meg, hogy

$$a_n = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n(\pi^2 + \log^2(x-1))}.$$



Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 7-ig

PM 5. Az f egészfüggvényt *érdekesnek* nevezzük, ha a $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$ parabola pontjaiban $\operatorname{Re} f(z) = 0$.

(a) Mutass példát nemkonstans érdekes függvényre.

(b) Bizonyítsd be, hogy minden f érdekes függvényre teljesül, hogy $f'(-3/4) = 0$.

(CIIM 2014, Costa Rica)