6. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. október 20.

6.1. Legyen $f(z)$ egészfüggvény (az egész síkon holomorf függvény).

(a) Igazoljuk, hogy $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ és $h(z) = \overline{f(-\bar{z})}$ is egészfüggvény.

(b) Az $f(z)$, $g(z)$ és $h(z)$ függvények összehasonlításával igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

6.2. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)|^2 = 1/n^4$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?

6.3. A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény holomorf és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

6.4. Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor, amely konvergens egy körben, és tegyük fel, hogy m az első olyan pozitív egész, amelyre $a_m \neq 0$. Keressünk olyan 0-ból induló egyenes szakaszt, amelyen $|f(z)| > |a_0|$.

6.5. A Liouville-tételből vezessük le, hogy ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor (a) a valós része nem lehet korlátos sem alulról, sem felülről; (b) az értékkészlete sűrű; (c) az értékkészlete a $[0, 1]$ szakaszon sűrű.

Házi feladatok

6.6. Az f függvény holomorf az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $[1, 2]$ szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutassuk meg, hogy a $[-2, -1]$ szakaszon is csak valós értékei vannak.

Miért nem működik a megoldás az $1 < |z| < 2$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ tartománnyal?

6.7. A Liouville-tétel segítségével igazold, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (vagyis $f(z + a) = f(z)$, $f(z + b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus többszörösei), akkor f konstans.

6.8. Az f függvény holomorf az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max\limits_{0 \leq t \leq \pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max\limits_{\pi \leq t \leq 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsuk be, hogy $|f(0)| \leq \sqrt{AB}$. (Maximum-elv egy alkalmas függvényre.)

6.9. Az f egészfüggvényre $\arg f(1/n) \equiv \dfrac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg f(2)$?

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 14-ig

PM 6. Legyen $0 < r_1 < r_2 < r_3$.

Bizonyítsd be, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf az $r_1 < |z| < r_3$ tartományon, és folytonos a határán, akkor

$$\left(\max_{|z|=r_2} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_1)} \leq \left(\max_{|z|=r_1} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_2)} \cdot \left(\max_{|z|=r_3} |f(z)|\right)^{\log(r_2/r_1)}.$$

(Hadamard-féle három kör tétel)