7. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. november 3.

7.1. Fejtsük Laurent-sorba az

$$f(z) = \frac{z^3}{z^2 + 4z + 3}$$

függvényt az 1 körül, az $2 < |z - 1| < 4$ halmazon.

(Bontsuk parciális törtekre, írjuk át mindenhol $(z-1)$-gyel, és alakítsuk a parciális törteket mértani sorok összegévé.)

7.2. Az f függvény holomorf a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon, és

$$\lim_{z\to 0} \big(z\, f(z)\big) = \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy f konstans.

7.3. Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf az a pont egy pontozott környezetében, és ott $|f(z)| > 1$, akkor a megszüntethető szingularitás vagy pólus.

7.4. Tegyük fel, hogy f-nek m-edrendű pólusa van a-ban, és p egy n-edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy $p\,(f(z))$ függvénynek mn-edrendű pólusa van a-ban.

7.5. Lehet-e az f függvény izolált szingularitása e^f-nek pólusa?

7.6. Bizonyítsuk be, hogy ha f 1 szerint periodikus egészfüggvény, amire $|f(z)| \le e^{6|z|}$, akkor f konstans. (Vizsgáljuk a $g(z) = f(.....)$ függvényt.)

Házi feladatok

7.7. Fejtsd Laurent-sorba a $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)}$ függvényt az $1 < |z - 1| < 2$ tartományon. Számítsd ki az együtthatókat az együtthatóformulából is.

7.8. Igazoljuk, hogy ha f-nek a-ban izolált szingularitása van, és vannak olyan $z_n \to a$ és $w_n \to a$ sorozatok, hogy $f(z_n) \to 1$, $f(w_n) \to 2$, akkor van olyan $s_n \to a$ sorozat is, hogy $f(s_n) \to 3$.

7.9. Legyen $D_1 = \{z :\ r < |z| < R\}$ és $D_2 = \{z :\ |z| < R\}$, ahol $0 < r < R$ valós számok.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : D_1 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre a következő állítások ekvivalensek:

(1) f analitikusan (holomorfan) folytatható D_2-re;
(2) f-nek létezik akárhányszoros primitív függvénye;
(3) Bármely $g : D_2 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre az fg függvénynek létezik primitív függvénye D_1-en.

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 21-ig

PM 7. Legyen $S(z) = z \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Igazoljuk, hogy

(a) ez a végtelen szorzat a teljes komplex számsíkon konvergens, és a szorzatfüggvény holomorf;

(b) $S(z + \pi) = -S(z)$;

(c) ha a komplex számsíkból a π minden többszörösének elhagyjuk egy egységnyi sugarú környezetét, akkor a megmaradt tartományon az $1/S(z)$ függvény korlátos;

(d) az $\frac{1}{S(z)} - \frac{1}{\sin z}$ függvény korlátos, és csak megszüntethető szingularitásai vannak;

(e) $S(z) = \sin z$.