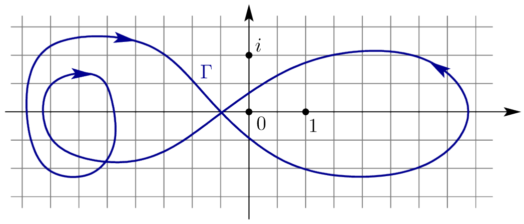
8. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. november 10.

8.1. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{z};\quad \frac{1}{z^2};\quad \frac{1}{z^2+2z};\qquad \frac{1}{\sin z};\quad \frac{e^z}{z^2+4};\quad \frac{e^z}{(z+4)^2};\quad \sin\frac{1}{z};\quad \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

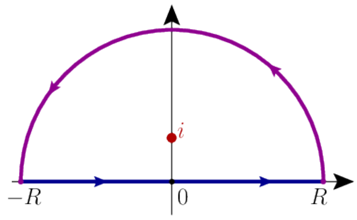
8.2. (a) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sin z} = ?$



(b) Legyen f egészfüggvény. Fejezzük ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{\sin^2 z}\mathrm{d}z$ értékét $f(0), f(\pi), f'(\pi/2)$ stb. segítségével.

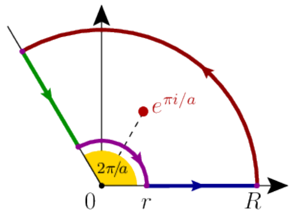
8.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = ?\qquad \text{(Integráljunk félkörön.)}$$



8.4.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = ?\qquad \text{(Integráljunk szögtartomány határán.)}$$



Házi feladatok

8.5. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{z^2+1};\quad \frac{1}{(z^2+1)^2};\quad \frac{1}{1+e^z};\quad \frac{e^z}{(z^2-1)^2};\quad \frac{e^z-z^3+8}{z^2+1}$$

8.6.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

8.7.

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 28-ig

PM 8. A reziduumtétel segítségével igazoljuk, hogy ha K nemnegatív egész, és $a_1, \dots, a_n$ különböző komplex számok, akkor

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^K}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}} (a_j - a_k)} = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\ge 0\\ k_1+\dots+k_n=K-n+1}} a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}.$$

(A baloldalon álló szám a z^K függvény osztott differenciája az $a_1, \dots, a_n$ alappontokon.)