9. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. november 17.

9.1. Írjuk fel a $\operatorname{ctg} z$ függvény 0-körüli Laurent sorának első három nemnulla tagját.

9.2. Az előadáson látott módon, a $\dfrac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2-\frac14}$ függvény reziduumaiból számítsuk ki a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\frac14}$ összeget. Utána számítsuk ki elemien (teleszkópos összeggé alakítva) is, hogy összehasonlítsuk az eredményt.

9.3. A $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}\cdot\dfrac{1}{z^3}$ függvény reziduumaiból számítsuk ki $\dfrac{1}{1^3}-\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{7^3}+\dfrac{1}{9^3}-+\dots$ értékét.

9.4. Legyen $f(z)$ holomorf a zárt egységkörlemezen, a körvonalon nem 0, és nem egységnyi.

(a) Mit állít elő az $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot z\,\mathrm{d}z$ integrál?

(b) Írjuk fel az f gyökeinek négyzetösszegét integrál alakban.

(c) Írjuk fel az f fixpontjainak számát és a fixpontok összegét integrál alakban.

9.5. A Rouché-tételből számoljuk ki, hogy hány gyöke van a 2^z+3z^2-z függvénynek az egységkörben.

9.6. A Rouché-tétel segítségével igzoljuk, hogy ha $p(z)$ n-edfokú polinom, akkor pontosan n gyöke van.

Házi feladatok

9.7. Mutassuk meg, hogy

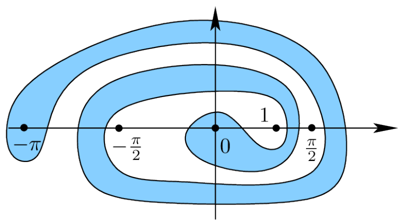
$$\frac{1}{\pi^2+1}+\frac{1}{4\pi^2+1}+\frac{1}{9\pi^2+1}+\frac{1}{16\pi^2+1}+\dots=\frac{1}{e^2-1}.$$

9.8. Hány gyöke van a $\sin z=2z^2$ egyenletnek az egységkörben?

9.9. (Pistike és az inverz függvény) Az f függvény holomorf az a pont egy környezetében, $f(a)=b$, és $f'(a)\neq 0$. Írjuk fel f lokális inverzét, vagyis minden, a b ponthoz közeli w-re az $f(z)=w$ egyenlet megoldását paraméteres integrál alakban:

$$f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi i1}\int_{|z-a|=r}\dots\dots\dots\,\mathrm{d}z.$$

9.10. Az ábrán látható tartományon az $f(z)=\log\cos z$ függvény holomorfan értelmezhető úgy, hogy $f(0)=1$. Határozzuk meg $f(-\pi)$ értékét az argumentum-elvből.



Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható dec. 5-ig

PM 9.1. Bizonyítsd be, hogy a polinomok gyökei folytonosan függnek az együtthatóktól, azaz ha az $a_nz^n+\dots+a_1z+a_0$ polinom (ahol $a_n\neq 0$) gyökei $u_1,\dots,u_n$, akkor minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan δ, hogy ha $b_0,\dots,b_n$ komplex számok és $|b_j-a_j|<\delta$ ($j=0,1,\dots,n$), és a $b_nz^n+\dots+b_1z+b_0$ polinom gyökei $w_1,\dots,w_n$, akkor az $1,\dots,n$ indexek egy alkalmas σ permutációjára $|w_j-u_{\sigma(j)}|<\varepsilon$ ($j=1,\dots,n$).

PM 9.2. (Pistike és az implicit függvény)

Legyen $F(z,w)$ kétváltozós komplex függvény, amely az (a,b) pont egy környezetében folytonos, és mindkét változó szerint parciálisan holomorf. Az $F(z,w)=0$ lesz a paraméteres egyenletünk: z a paraméter, w az ismeretlen.

Tegyük fel, hogy az a,b komplex számokkal $F(a,b)=0$ (vagyis a $z=a$ paraméterértékre $w=b$ megoldás), továbbá $\partial_2F(a,b)\neq 0$. Bizonyítsd be, hogy léteznek olyan $r,s>0$ számok és ezekhez egy egyértelmű $g:B(a,r)\to B(b,s)$ implicit függvény, amelyre $F(z,g(z))=0$, vagyis a $F(z,w)=0$ paraméteres egyenlet lokálisan egyértelműen megoldható, és írd fel a $g(z)$ függvényt egy alkalmas komplex vonalintegrállal.