10. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. november 24.

10.1. A Rouché-tételből számoljuk ki, hogy hány gyöke van a $\sin z = \dfrac{6z^2}{2z+1}$ egyeletnek az egységkörben.

10.2. Írjunk fel (lehetőleg számolás nélkül) egy-egy olyan lineáris tört függvényt, amely

(a) a felső félsíkot önmagára képezi úgy, hogy a 0, 1, ∞ pontok képe rendre 1, ∞, 0;

(b) az egységkört a jobb félsíkba képezi;

(c) a jobb félsíkot az egységkörbe képezi;

(d) az egységkör felső felét az első síknegyedbe képezi.

10.3. Legyen $\mathbb{D}$ az egységkör, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf, és $a \in \mathbb{D}$ az f-nek gyöke. Bizonyítsuk be, hogy $\left|f(z)\right| \le \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$, mégpedig

(a) a $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$ függvény vizsgálatával; (b) a $h(w) = f\left(\dfrac{w+a}{1+\bar{a}w}\right)$ függvény vizsgálatával.

10.4. Alkalmazhatjuk-e a Vitali–Montel tételt az $f_n(z) = \sin(nz)$ függvénysorozatra a valós egyenes egy kis környezetében?

10.5. (a) Mik a komplex sík konform automorfizmusai?
(b) Mik a felső félsík konform automorfizmusai?

Házi feladatok

10.6. Hány fixpontja van a $2^z + 3z^2$ függvénynek az egységkörben?

10.7. Legyen φ olyan lineáris tört függvény, ami az $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ félkört megfelelteti az $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ negyedsíknak úgy, hogy $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$.

(a) Határozd meg $\varphi(-1)$, $\varphi(1)$ és $\varphi(2)$ lehetséges értékeit közvetlenül a lineáris tört függvények tanult tulajdonságaiból.

(b) Írd fel összes ilyen tulajdonságú $\varphi(z)$-t képlettel.

10.8. Az $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf függvénynek $w_1, w_2, \ldots, w_n$ különböző gyökei. Bizonyítsd be, hogy $|f(0)| \le \left|w_1 w_2 \ldots w_n\right|$. (Használd a 10.3. feladatot.)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható dec. 12-ig

PM 10. Legyen $P(x)$ olyan nemkonstans valós polinom, amelyre $P(\cos t)^2 + P(\sin t)^2 = 1$. Mutasd meg, hogy $P(x) = \pm T_k(x)$ valamilyen páratlan pozitív egész k-val. (T_k a k-adik elsőfajú Csebisev-polinom, $T_k(\cos t) = \cos kt$.)

Segítség: legyen $\cos t = \frac{z+1/z}{2}$, $\sin t = \frac{z-1/z}{2i}$.