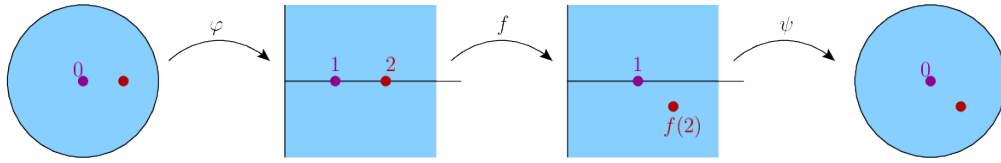
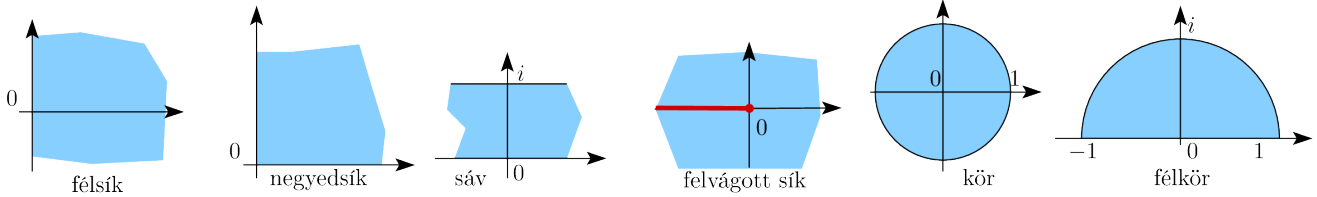


11. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. december 1.

11.1. Legyen $H = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ a nyílt jobb félsík. Az $f : H \rightarrow H$ függvény holomorf, és $f(1) = 1$. Mi a lehetséges $f(2)$ értékek halmaza? (Komponáljuk f -et alkalmas $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ lineáris tört függvényekkel, és alkalmazzuk a Schwarz-lemmát.)



11.2. Keressünk az alábbi tartományok között konform megfeleltetéseket.



11.3. Melyik függvény harmonikus az alábbiak közül? Amelyik harmonikus, az melyik holomorf függvény valós része, és mi a harmonikus konjugáltja?

$$(x, y) \mapsto x; \quad (x, y) \mapsto x^2; \quad x^2 + y^2; \quad x^2 - y^2; \quad \log(x^2 + y^2) \quad \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2x + x^2 + y^2}$$

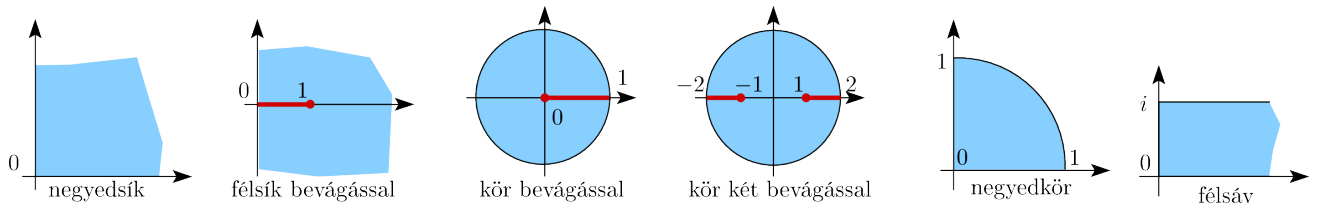
11.4. Igazoljuk, hogy harmonikus függvény parciális deriváltjai is harmonikusak.

11.5. Az u függvény harmonikus az egységkör belsejében, folytonos a $\overline{B}(0, 1) \setminus \{1\}$ halmazon, és a körvonal 1-től különböző pontjaiban $u = 0$. Következik-e ebből, hogy $u \equiv 0$?

Házi feladatok

11.6. Igazold, hogy ha f holomorf az egységkörben, és $|f(z)| < 1$, akkor $\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$.

11.7. Keress az alábbi tartományok között konform megfeleltetéseket.



11.8. Igazold, hogy ha egy harmonikus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülről korlátos, akkor konstans.

11.9. Mutassuk meg, hogy ha egy kétváltozós valós polinom harmonikus, akkor egy komplex polinom valós része.

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható dec. 15-ig

PM 11. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ korlátos tartomány (nem feltétlenül egyszeresen összefüggő), $f : D \rightarrow D$ holomorf, és $z_0 \in D$ fixpontja $f(z)$ -nek. Igazold, hogy $|f'(z_0)| \leq 1$.