12. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. december 8.

12.1. A *Mikulás-szigetcsoport*tól körülbelül kétezer-négyszázhatvan kilométerre északra az Atlanti-óceán feneke kilyukadt, amikor belefúródott a *Kazincbarcika* torpedóromboló. Az elfolyó víz miatt a felszínen stabil, nem örvénylő, forgásszimmetrikus víztölcsér keletkezett.
A víztölcsér mélységét a tengelytől közepesen nagy távolságban, ahol a víz függőleges irányú sebessége sokkal kisebb, mint a vízszintes irányú sebessége, közelítőleg egy harmonikus függvény írja le. Mi lehet ez a függvény?
(A Kazincbarcika torpedórombolóról és a Mikulás-szigetcsoportról Moldova György *A Lakinger Béla zsebcirkáló* c. novellájában olvashattok bővebben.)

12.2. Mondjuk ki, és igazoljuk a nyílt leképezés tételének és a megszüntethető szingularitások jellemzésének harmonikus megfelelőit.

12.3. Legyen n pozitív egész és $-1 < a < 1$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1-2a\cos t + a^2}\mathrm{d}t = ? \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{1-2a\cos t + a^2}\mathrm{d}t = ? \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(5+4\cos t)}{1-2a\cos t + a^2}\mathrm{d}t = ?$$

12.4. Vezessük le a Poisson-formulát közvetlenül a Cauchy-formulából. Legyen z rögzített pont az egységkör belsejében. Ha $f(w)$ és $g(w)$ is holomorf a zárt egységkörlemezen, akkor

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)\left(\frac{1}{w-z} + g(w)\right)\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\left(\frac{1}{e^{it}-z} + g(e^{it})\right)e^{it}\mathrm{d}t.$$

Keressünk olyan $g(w)$ függvényt, amelyre az $\left(\frac{1}{e^{it}-z} + g(e^{it})\right)e^{it}$ magfüggvény valós értékű.

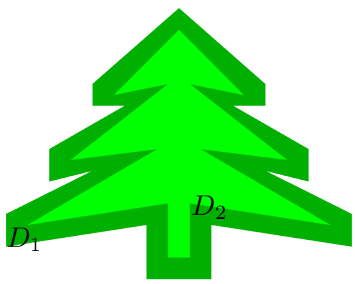
12.5. Mi a Poisson formula a felső félsíkon? Konstruáljunk olyan $P(z,t)$ magfüggvényt, amely $\operatorname{Im} z > 0$, $t \in \mathbb{R}$ esetén értelmes, és igaz rá, hogy ha $h(z)$ harmonikus és korlátos a felső félsík belsejében, és folytonos a felső zárt félsíkon, akkor $\operatorname{Im} z > 0$ esetén

$$h(z) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t)\, P(z,t)\,\mathrm{d}t.$$

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok, írásban beadható dec. 19-ig

PM 12.1. Legyen D_1 az ábrán a külső, sötétebben satírozott tartomány, D_2 pedig a külső és a belső rész együtt.
Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $f : D_1 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre a következő állítások ekvivalensek:

(a) f analitikusan folytatható D_2-re;
(b) f-nek létezik akárhányszoros primitív függvénye;
(c) Bármely $g : D_2 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre az fg függvénynek létezik primitív függvénye D_1-en.



PM 12.2. Legyen G konvex tartomány, és f konform leképezés az egységkörlap és G között. Mutassuk meg, hogy ekkor bármely, az egységkörlapban fekvő körlemez f szerinti képe konvex.