

1. KFT gyakorlat, 2023. szeptember 22. 8:25–9:55

1.1. Ábrázoljuk (vázlatosan) a következő halmazokat:

$$\{e^z : |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}; \quad \{e^z : |z| < 1\}; \quad \{\log z : \operatorname{Re} z > 0, |z| < 2\}; \quad \{\log z : |z-1| < 1\}.$$

(A log most a logaritmus főértéke.)

1.2. Mi az e^{iz} , e^{-iz} , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ függvények egyenletes limesze, ha $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$? Töltsük ki a táblázatot.

$f(z)$	e^{iz}	e^{-iz}	$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$	$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$\operatorname{tg} z = -i \frac{1 - e^{-2iz}}{1 + e^{-2iz}} = i \frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}$	$\operatorname{ctg} z$
$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} f(z)$						
$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty} f(z)$						

1.3. Fejezzük ki az $\arcsin w$ függvényt a komplex logaritmus és négyzetgyök segítségével, avagy rögzített $w \in \mathbb{C}$ szám esetén oldjuk meg a $\sin z = w$ egyenletet.

Mi az $\arcsin w$ függvény értékkészlete?

Mik a komplex szinuszfüggvény gyökei?

1.4. Ábrázoljuk $\log(1 - i)$ és $(1 - i)^i$ értékeit.

1.5. Tekintsük a $\log z$ függvénynek azt a $\mathbb{C} \setminus \{x + i \sin x : x \geq 0\}$ tartományon folytonos ágát, amelyre $\log 1 = 0$. Erre a $\log z$ függvényre $\log 5 = ?$

1.6.

(a) Hova képezi a $w(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ Zsukovszkij-leképezés az egységkörvonalat?

(b) Mutassuk meg, hogy a 0 középpontú, nem egységnyi sugarú körök képei 1, -1 fókuszú ellipszisek. (Hozzuk egyszerűbb alakra az $|z - 1| + |z + 1|$ kifejezést, lehetőleg a $z = x + yi$ algebrai alakra áttérés nélkül.)

(c) Mutassuk meg, hogy a 0-n átmenő, a tengelyektől különböző egyenesek képei 1, -1 fókuszú hiperbolák.

(d) Milyen pontokban szögtartó a Zsukovszkij-függvény?

(e) Igazoljuk a Zsukovszkij-függvény és a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy az 1, -1 fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

Házi feladatok

1.7. Fejezzük ki az $\operatorname{arc} \operatorname{tg} z$ függvényt a komplex logaritmus segítségével.

Mi a komplex tangensfüggvény értékkészlete?

1.8. Számítsuk ki i^{-i} összes értékét.

1.9. Hova képezi a komplex koszinuszfüggvény

(a) a $[0, \pi/2]$ szakaszt?

(b) A képzetes tengely pozitív felét?

(c) A $\pi/2$ végpontú, felfelé álló függőleges egyenest?

(d) A $0 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0$ tartományt?

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható okt. 13-ig

PM 1.1. Abel-átrendezéssel bizonyítsd be, hogy a $\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hatványsor az egységkörvonal minden, az 1-től különböző pontjában konvergál.

PM 1.2. Az ábrán látható tartományon a $f(z) = \log \cos z$ függvény értelmezhető úgy, hogy f folytonos, és $f(0) = 0$. Mennyi $f(-\pi)$?

