2. KFT gyakorlat, 2023. szeptember 29. 8:25–9:55

2.1. Tekintsük a $\log z$ függvénynek azt a $\mathbb{C}\setminus\{x+i\sin x : x \geq 0\}$ tartományon folytonos ágát, amelyre $\log 1 = 0$. Erre a $\log z$ függvényre $\log 5 =$?

2.2.

(a) Hova képezi a $w(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ *Zsukovszkij-leképezés* az egységkörvonalat?

(b) Mutassuk meg, hogy a 0 középpontú, nem egységnyi sugarú körök képei $1, -1$ fókuszú ellipszisek. (Hozzuk egyszerűbb alakra az $|z-1| + |z+1|$ kifejezést, lehetőleg a $z = x + yi$ algebrai alakra áttérés nélkül.)

(c) Mutassuk meg, hogy a 0-n átmenő, a tengelyektől különböző egyenesek képei $1, -1$ fókuszú hiperbolák.

(d) Milyen pontokban szögtartó a Zsukovszkij-függvény?

(e) Igazoljuk a Zsukovszkij-függvény és a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy az $1, -1$ fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

2.3. Írjuk fel azokat az $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $u(x,y) + v(x,y) \cdot i = (x+yi)^3$, és ellenőrizzük a Cauchy–Riemann egyenleteket.

2.4. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Cauchy-Riemann egyenletek a következő függvényekre:

$$(x^2+y^2, 2xy); \qquad (x^2-y^2, 2xy); \qquad (e^x\cos y, e^x \sin y).$$

2.5. Számítsuk ki a Cauchy-Hadamard tételből az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n}.$$

2.6. (a) Milyen azonosságokat kaphatunk az $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ azonosság négyzetre emelésével, illetve deriválásával?

(b) Írjuk fel a $\dfrac{1}{z^3}$ függvény 1 körüli Taylor-sorát. Mi a Taylor-sor konvergenciahalmaza? Előállítja-e a Taylor-sor a függvényt?

Házi feladatok

2.7. Legyen a $D := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$ tartományon $\log z$ a logaritmus főértéke. Igaz-e, hogy $a, b \in D$ esetén $\log(ab) = \log a + \log b$?

2.8. Keressünk olyan $v(x,y) : R^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényt (ha van), melyre az $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mindenütt differenciálható, ha

(a) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$;

(b) $u(x,y) = x^2 + y^2$.

2.9. Fejtsük hatványsorba a 0 körül az $\dfrac{1}{1+z}$, az $\dfrac{1}{(1+z)^3}$ és a $\log(1+z)$ függvényt.

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható okt. 20-ig

PM 2. Legyen f olyan polinom, amire igaz az, hogy f' gyökei az egységkör belsejében vannak. Bizonyítsuk be, hogy az egységkörvonal f szerinti képe mindig balfelé kanyarodik, azaz bármely valós t-re $\left(\arg\left(\left(f(e^{it})\right)'\right)\right)' > 0$.