3. KFT gyakorlat, 2023. október 6. 8:25–9:55

3.1. Legyen $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t + t^2 i$.

(a) Számítsuk ki az $\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z$ vonalintegrált a Riemann-integrálos átírásból.

(b) Számítsuk ki az $\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z$ vonalintegrált a Newton–Leibniz formulából.

(c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \overline{z} \mathrm{d}z = ?$

3.2. Legyen a komplex szám. Alakítsuk át egy holomorf függvény komplex vonalintegráljává az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|z - a\right|^2 |\mathrm{d}z|$$

integrált, majd számítsuk ki. (Az egységkörvonalon $\overline{z} = 1/z$, $|\mathrm{d}z| = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$.)

3.3. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Re} z < 0$ esetén $\left|1 - e^z\right| < |z|$. (Hol van ebben vonalintegrál?)

3.4. Legyen $p(z)$ legalább másodfokú polinom, amelynek minden gyöke az $|z| < r_0$ körbe esik. Legyen $r > r_0$ esetén $I(r) = \displaystyle\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{p(z)}\mathrm{d}z$. Igazoljuk, hogy (a) $\lim\limits_{r\to\infty} I(r) = 0$; (b) $I(r)$ konstans; (c) ???

3.5. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon?

$$(a)\ e^{2z},\quad |z| < 1; \qquad (b)\ e^{z^2},\quad \mathbb{C}; \qquad (c)\ z^2 + \frac{1}{z^2},\quad \mathbb{C}\setminus\{0\}; \qquad (d)\ z + \frac{1}{z},\quad \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$$(e)\ \frac{1}{z^3 - z},\quad |z| > 1; \qquad (f)\ \frac{1}{z^3 - z},\quad \mathbb{C}\setminus\{-1, 0, 1\}$$

Házi feladatok

3.6.

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{1 + z + z^2}{z}\mathrm{d}z = ?$$

3.7.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |z - a|^4 \, |\mathrm{d}z| = ?$$

3.8. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon?

$$(a)\ \overline{z},\quad \mathbb{C}; \qquad (b)\ \frac{1}{z},\quad \{\operatorname{Re} z > 0\}; \qquad (c)\ \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}},\quad \mathbb{C}\setminus[-1, 1]$$

(vegyük azt a $\sqrt{z^2 - 1}$ fügvényt, amely a $(1, +\infty)$ félegyenesen pozitív, a $(-\infty, -1)$ félegyenesen negatív.)

3.9. Tudjuk, hogy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1$. Ennek felhasználásával igazoljuk, hogy tetszőleges a valós számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i a x}\mathrm{d}x = e^{-\pi a^2},$$

avagy az $e^{-\pi x^2}$ függvény Fourier-transzformáltja önmaga. (Alakítsuk a kitevőt teljes négyzetté, és integráljunk az $-R, R, R + ai, -R + ai$ csúcsú téglalap kerületén.)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható okt. 27-ig

PM 3. Bizonyítsuk be az algebra alaptételét a következő módszerrel: Tetszőeges n-edfokú, nem konstans $p(z)$ komplex együtthatós polinom esetén vizsgáljuk az $\dfrac{z^{n-1}}{p(z)}$ függvénynek egy nagy körön vett vonalintegrálját, és hasonlítsuk össze az $\dfrac{1}{z}$ függvény vonalintegráljával.