

4. KFT gyakorlat, 2023. október 13. 8:25–9:55

4.1. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon?

$$(e) \frac{1}{z^3 - z}, \quad |z| > 1; \quad (f) \frac{1}{z^3 - z}, \quad \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

4.2. Az általánosított Goursat-lemma, a Cauchy-tétel és a Cauchy-integrálformula segítségével számítsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

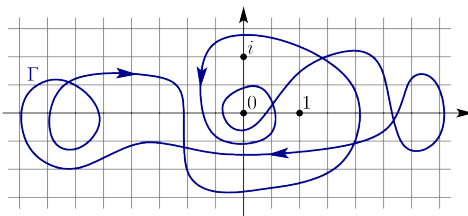
$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz \quad \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz \quad \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz \quad \int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz \quad \int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz$$

4.3. A Cauchy-formula szerint ha $f(z)$ holomorf a zárt egységkörlemezen, akkor a kör bármely belső s pontjára $f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-s} dz$.

(a) Deriváljuk a Cauchy-formulát s szerint, és írjuk fel $f'(s)$ -et vonalintegrál alakban.

(b) A deriváltra felírt képletet integráljuk, és ellenőrizzük, hogy visszakapjuk a Cauchy-formulát.

4.4. Legyen Γ az ábrán látható zárt görbe.



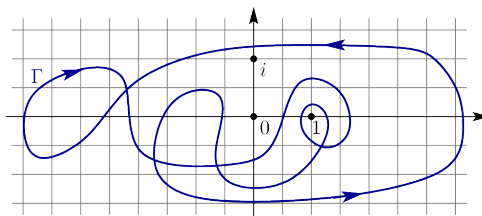
$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} =? \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z+3} =? \quad \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz =? \quad \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)^2} dz =?$$

Házi feladatok

4.5. Számítsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

$$\int_{|z|=3} \frac{z}{e^z - 1} dz \quad \int_{|z|=3} \frac{1}{\sin z \cos z} dz \quad \int_{|z|=2} \frac{1}{\sin z} dz \quad \int_{|z|=5} \frac{1}{\sin z} dz \quad \int_{|z|=3} \frac{1}{e^z - 1} dz$$

4.6. Legyen f egészfüggvény. Fejezd ki $\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^2(z+3)} dz$ értékét $f(0)$, $f'(0)$ és $f'(-3)$ segítségével.



4.7. Az f függvény holomorf a zárt egységkörben, és ott $|f| \geq 1$. legfeljebb mekkora lehet $|f'(0)|$?

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 3-ig

PM 4. A $p(z) = a(z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_n)$ polinom gyökei közül k darab az $|z| < r$ kör belsejébe esik, a többi gyök a körön kívül van. Legyen $\gamma(t) = p(re^{it})$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

(a) Hogyan számíthatjuk ki az $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ integrált helyettesítéses integrálással?

(b) Mi a γ görbe 0-ra vonatkozó indexe? (Segítség: bontsd parciális törtekre az $p'(z)/p(z)$ függvényt.)