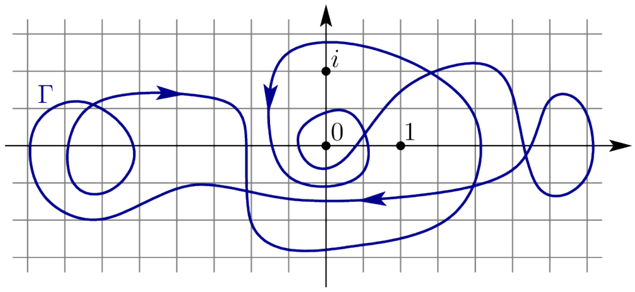
5. KFT gyakorlat, 2023. október 20. 8:25–9:55

5.1. Legyen Γ az ábrán látható zárt görbe.



(a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^4}\mathrm{d}z = ?$ (b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}\mathrm{d}z = ?$ (c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-3)^3}\mathrm{d}z = ?$ (d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-3)^2(z+3)^2}\mathrm{d}z = ?$

5.2. Tegyük fel, hogy az f függvény holomorf a zárt felső félsíkban, és $|f| \le 1$.

(a) Írjuk fel $f'(i)$ értékét vonalintegrál alakban, az integrációs út legyen egy R sugarú félkör.

(b) Keressünk felső becslést $\left|f'(i)\right|$ értékére.

5.3. Legyen $\zeta(s)$ a Riemann-zeta függvény:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^s}, \qquad \text{ha } \operatorname{Re} s > 1.$$

A Morera-tétel segítségével igazoljuk, hogy $\zeta(s)$ holomorf.

5.4. A $\sin \dfrac{1}{1-z}$ függvénynek végtelen sok gyöke van az egységkörben. Miért nem mond ez ellent az unicitástételnek?

5.5. Döntsük el, van-e olyan $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

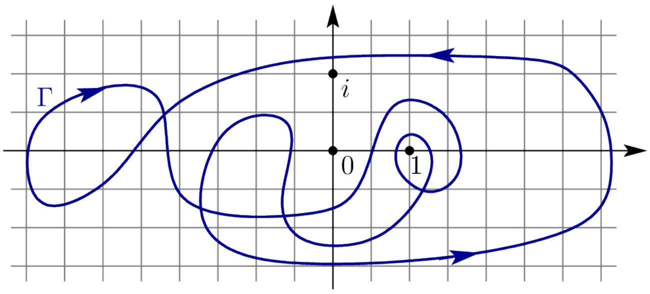
(a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n}$; (b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n+1}$; (c) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; (d) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^n}$.

5.6. (a) Az $f(z)$ függvény holomorf az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $[1,2]$ szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Az $f(z)$ és a $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ függvények összehasonlításával mutassuk meg, hogy f-nek a $[-2,-1]$ szakaszon is csak valós értékei vannak.

(b) Miért nem működik a megoldás az $1 < |z| < 2$, $-\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{4\pi}{3}$ tartománnyal?

Házi feladatok

5.7. Legyen f egészfüggvény. Fejezd ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2(z+3)}\mathrm{d}z$ értékét $f(0)$, $f'(0)$ és $f(-3)$ segítségével.



5.8. Az f függvény holomorf a zárt egységkörben, és $|f| \le 1$. legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

5.9. Döntsd el, van-e olyan $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amelyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(a)\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+2}; \qquad (b)\ f\left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{n}; \qquad (c)\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\cos(n\pi)n+2}.$$

5.10. (a) Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$? (Vizsgáld a $h(z) = f(z) \cdot \overline{f(\overline{z})}$ függvényt.)

(b) A $g(z)$ egészfüggvényre $\arg g(1/n) \equiv \dfrac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg g(2)$?

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 10-ig

PM 5.1. Legyen

$$\sqrt{\frac{-z}{\log(1-z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1)$$

ahol a log a logaritmus főértéke, és $\sqrt{\ }$ a négyzetgyökfüggvény főértéke. (A gyök alatti kifejezés nem veszi fel a nullát, és negatív valós értéket sem.)

Bizonyítsd be, hogy $a_1, a_2, \ldots$ mindegyike negatív.

PM 5.2. Az f egészfüggvényt *érdekesnek* nevezzük, ha a $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$ parabola pontjaiban $\operatorname{Re} f(z) = 0$.

(a) Mutass példát nemkonstans érdekes függvényre.

(b) Bizonyítsd be, hogy minden f érdekes függvényre teljesül, hogy $f'(-3/4) = 0$.

(CIIM 2014, Costa Rica)