6. KFT gyakorlat, 2023. október 27. 8:25–9:55

6.1. (*a*) Az $f(z)$ függvény holomorf az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $[1, 2]$ szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Az $f(z)$ és a $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ függvények összehasonlításával mutassuk meg, hogy f-nek a $[-2, -1]$ szakaszon is csak valós értékei vannak.

(*b*) Miért nem működik a megoldás az $1 < |z| < 2$, $\quad -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{4\pi}{3}$ tartománnyal?

6.2. A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény holomorf és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

6.3. Legyen $f(z)$ olyan egészfüggvény, amelyre $|f(z)| \le e^{|z|}$, és legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a függvény 0 körüli hatványsora. Az együtthatóbecslés segítségével igazoljuk, hogy $|a_n| \le \left(\frac{e}{n}\right)^n$. (Mekkora körre érdemes felírni az együtthatóbecslést?)

6.4. (a) A Liouville-tétel bizonyítása mintájára bizonyítsuk be, hogy ha egy $f(z)$ egészfüggvényre $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, akkor $f(z)$ konstans.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $f(z)$ egészfüggvény, n pozitív egész, és $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = 0$, akkor $f(z)$ legfeljebb n-edfokú polinom.

6.5. Tegyük fel, hogy $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ az $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$ körgyűrűn. Fejezzük ki

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|f(z)\right|^2 |\mathrm{d}z|$$

értékét az együtthatókkal.

Házi feladatok

6.6. (*a*) Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$? (Vizsgáld a $h(z) = f(z) \cdot \overline{f(\overline{z})}$ függvényt.)

(*b*) A $g(z)$ egészfüggvényre $\arg g(1/n) \equiv \frac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg g(2)$?

6.7. Az $f(z)$ függvény holomorf az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max_{0\le t\le\pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max_{\pi\le t\le 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsd be, hogy $|f(0)| \le \sqrt{AB}$. (Maximum-elv egy alkalmas függvényre.)

6.8. A Liouville-tétel és az unicitástétel segítségével igazold, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (vagyis $f(z + a) = f(z)$, $f(z + b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus többszörösei), akkor f konstans.

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 17-ig

PM 6. Legyen $0 < r_1 < r_2 < r_3$.

Bizonyítsd be, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf az $r_1 < |z| < r_3$ tartományon, és folytonos a határán, akkor

$$\left(\max_{|z|=r_2} |f(z)|\right)^{\log \frac{r_3}{r_1}} \le \left(\max_{|z|=r_1} |f(z)|\right)^{\log \frac{r_3}{r_2}} \cdot \left(\max_{|z|=r_3} |f(z)|\right)^{\log \frac{r_2}{r_1}}.$$

(Hadamard-féle három kör tétel)