

7. KFT gyakorlat, 2023. november 10. 8:25–9:55

A jövő héten:

- **Hétfő**, nov. 13. 12:00–13:30: **gyakorlat**, Déli Tömb D.3-719 terem
- **Péntek**, nov. 17. 8:00-10:00: **ZH**, az első 7 gyakorlat (szept. 22.–nov. 10.) anyagából

7.1. A jegyzetben leírt program alapján fejtsük Laurent-sorba az $\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ függvényt az 1 körül az $|z-1| < 1$, az $1 < |z-1| < 2$ és a $|z-1| > 2$ tartományon.

7.2. Az $f(z)$ függvény holomorf a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon, és

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z f(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(z)$ konstans. (Hol van ebben Laurent-sor?)

7.3. Milyen fajta szingularitása van alábbi függvényeknek a 0-ban? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{z}; \quad \frac{1}{z^2}; \quad \frac{e^z}{z^2}; \quad e^{1/z}; \quad \frac{z}{\sin z}; \quad \frac{1}{\sin z}$$

7.4. Tegyük fel, hogy $f(z)$ -nek m -edrendű pólusa van a -ban, és $p(w)$ egy n -edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy a $p(f(z))$ függvénynek mn -edrendű pólusa van a -ban.

7.5. Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf az a pont egy pontozott környezetében, és ott $|f(z)| > 1$, akkor a megszüntethető szingularitás vagy pólus.

7.6. Lehet-e az $f(z)$ függvény izolált szingularitása $e^{f(z)}$ -nek pólusa? (Ha $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$, akkor...)

Házi feladatok

7.7. Fejtsd Laurent-sorba a $\frac{z^3 + 2}{z(z+1)}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ halmazon.

7.8. Milyen fajta szingularitása van alábbi függvényeknek a 0-ban? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{z^2 + 2z}; \quad \sin \frac{1}{z^3}; \quad z^3 e^{1/z}; \quad \frac{z}{\sin^2 z}$$

7.9. Bizonyítsd be, hogy ha $f(z)$ 1 szerint periodikus egészfüggvény, amire $|f(z)| \leq e^{6|z|}$, akkor $f(z)$ konstans. (Vizsgáld a $g(z) = f(\dots)$ függvényt.)

7.10. Mi lehetne a L'Hospital-szabály holomorf függvényekre?

PM 7. Bizonyítsd be (a nagy Picard-tétel felhasználása nélkül), hogy ha egy holomorf függvénynek lényeges szingularitása van a 0-ban, akkor a 0 bármely környezetének képe belemetsz minden egyenes szakaszba.