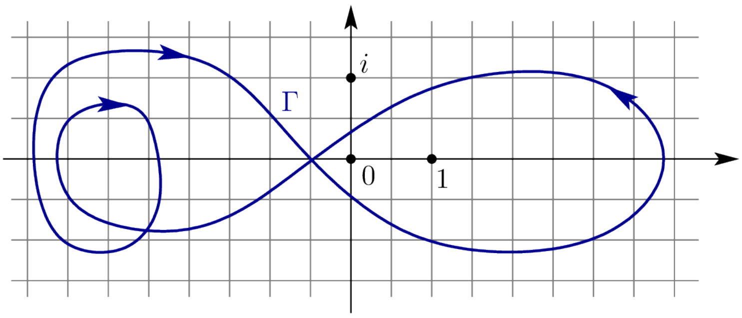
8. KFT gyakorlat, 2023. november 13. 12:00–13:30

8.1. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduum?

$$(a)\quad \frac{e^z}{z^2+1}; \qquad (b)\quad \frac{1}{e^z-1}; \qquad (c)\quad \frac{1}{\sin^3 z}$$

8.2. (a) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sin z} = ?$

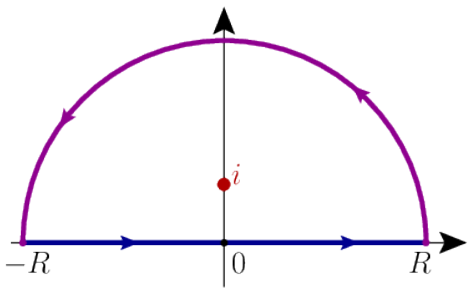
(b) Legyen f egészfüggvény. Fejezzük ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{\sin^2 z}\mathrm{d}z$ értékét $f(0), f(\pi), f'(0)$ stb. segítségével.



8.3. Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvény Fourier-transzformáltját, avagy $s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, e^{-\pi i s x}\,\mathrm{d}x = ?$$

(Integráljunk félkörön.)



8.4. Számítsuk ki a $\dfrac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{x^2 - \frac{1}{4}}$ függvény reziduumaiból a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}$ összeget. Utána számítsuk ki teleszkópos összeggé alakítva is, és hasonlítsuk össze az eredményt.

8.5. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{\pi^2+1} + \frac{1}{4\pi^2+1} + \frac{1}{9\pi^2+1} + \frac{1}{16\pi^2+1} + \ldots = \frac{1}{e^2-1}.$$

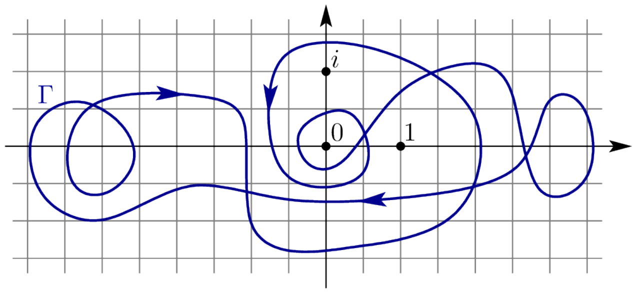
8.6. Legyen $f(z)$ legalább másodfokú polinom, a gyökei $w_1, \ldots, w_n$. Az $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{f(z)}$ integrál vizsgálatával mutassuk meg, hogy $f'(w_1), \ldots, f'(w_n)$ konvex burka tartalmazza a 0-t.

Házi feladatok

8.7. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{1+e^z}; \qquad \frac{e^z - z^3 + 8}{z^2+1}$$

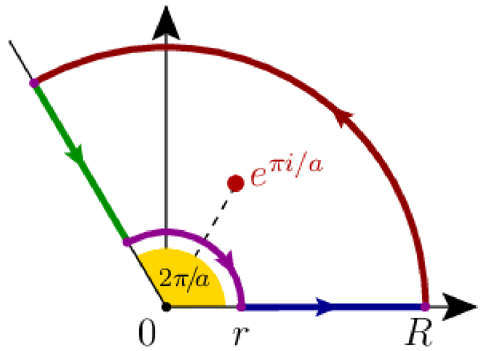
8.8. Legyen f egészfüggvény. Fejezd ki $\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2 \cos z} \mathrm{d}z$ értékét $f(0), f(\pi), f'(\pi/2)$ stb. segítségével.



8.9. Legyen $a > 1$.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = ?$$

(Integráljunk szögtartomány határán.)



8.10. A $\frac{\pi}{\cos(\pi z)} \cdot \frac{1}{z^3}$ függvény reziduumaiból számítsuk ki $\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots$ értékét.

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható dec. 1-ig

PM 8. A reziduumtétel segítségével igazoljuk, hogy ha K nemnegatív egész, és $a_1, \ldots, a_n$ különböző komplex számok, akkor

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^K}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le n \\ k\ne j}} (a_j - a_k)} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \ge 0 \\ k_1+\ldots+k_n = K-n+1}} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}.$$

(A baloldalon álló szám a z^K függvény osztott differenciája az $a_1, \ldots, a_n$ alappontokon.)