9. KFT gyakorlat, 2023. november 24. 12:00–13:30

9.1. Számítsuk ki a $\dfrac{\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)}{x^2-\frac14}$ függvény reziduumaiból a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\frac14}$ összeget. Utána számítsuk ki teleszkópos összeggé alakítva is, és hasonlítsuk össze az eredményt.

9.2. Mutassuk meg, hogy $\dfrac{1}{\pi^2+1}+\dfrac{1}{4\pi^2+1}+\dfrac{1}{9\pi^2+1}+\dfrac{1}{16\pi^2+1}+\ldots=\dfrac{1}{e^2-1}$.

9.3. Vezessük le a maximumelvet a nyílt leképezés tételéből.

9.4. Legyen $f(z)$ holomorf a zárt egységkörlemezen, a körvonalon nem 0.

(a) Mit állít elő az $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot z\right)z\,dz$ integrál?

(b) Írjuk fel az f egységkörbe eső gyökeinek négyzetösszegét integrál alakban.

9.5. Legyen a komplex szám, $|a|=3$. A Rouché-tételből számoljuk ki, hogy hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a z^4+z^3+az-1 polinomnak az $1<|z|<2$ tartományon.

9.6. Bizonyítsuk be az algebra alaptételét a Rouché-tétel segítségével.

Házi feladatok

9.7. (a) A $\dfrac{\pi}{\cos(\pi z)}\cdot\dfrac{1}{z}$ függvény reziduumainak összeadásával ellenőrizzük, hogy

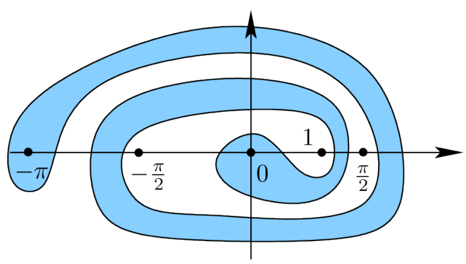
$$1-\frac13+\frac15-\frac17+\frac19-+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

(b)
$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots=?$$

9.8. Az argumentum-elvből mutassuk meg, hogy egy elliptikus (két irányban periodikus), nem konstans meromorf függvény a fundamentális paralelogrammán minden értéket és a ∞-t is (multiplicitással) ugyanannyiszor, de legalább kétszer vesz fel.

9.9. Hány gyöke van a 2^z+3z^2-z függvénynek az egységkörben?

9.10. Az ábrán látható tartományon az $f(z)=\log\cos z$ függvény holomorfan értelmezhető úgy, hogy $f(0)=0$. Határozzuk meg $f(-\pi)$ értékét az argumentum-elvből.



(Segítség: vizsgáljuk a tartományt és a tartomány tükörképét is.)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, beadható dec. 8-ig

PM 9.1. A karakterisztikus függvények gyökeinek vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges X,Y független, azonos eloszlású, legfeljebb 5 abszolút értékű valószínűségi változókhoz létezik olyan $t\in[0,1]$, amire $|P(X+Y<t)-t|>10^{-10}$.

(Schweitzer-verseny alapján)

PM 9.2. Bizonyítsd be, hogy a polinomok gyökei folytonosan függnek az együtthatóktól, azaz ha az $a_nz^n+\ldots+a_1z+a_0$ polinom (ahol $a_n\neq 0$) gyökei $u_1,\ldots,u_n$, akkor minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan δ, hogy ha $b_0,\ldots,b_n$ komplex számok és $|b_j-a_j|<\delta$ $(j=0,1,\ldots,n)$, és a $b_nz^n+\ldots+b_1z+b_0$ polinom gyökei $w_1,\ldots,w_n$, akkor az $1,\ldots,n$ indexek egy alkalmas σ permutációjára $|w_j-u_{\sigma(j)}|<\varepsilon$ $(j=1,\ldots,n)$.