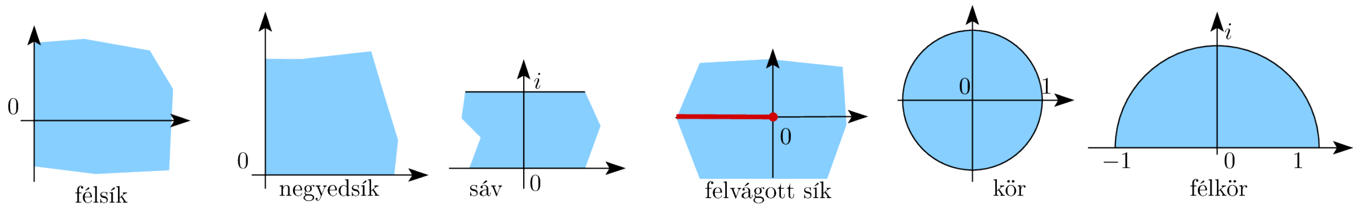
10. KFT gyakorlat, 2023. december 1. 12:00–13:30

10.1. A $\operatorname{Re} s > 1$ félsíkban az (Euler–)Riemann-zeta függvényt a $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ Dirichlet-sorral definiáljuk. Weierstrass tételei segítségével mutassuk meg, hogy $\zeta(s)$ holomorf, és írjuk fel a deriváltját.

10.2. Miért nem alkalmazhatjuk a Vitali-Montel tételt az $f_n(z) = \sin(nz)$ függvénysorozatra a valós egyenes egy kis környezetében?

10.3. Keressünk az alábbi tartományok között konform megfeleltetéseket.



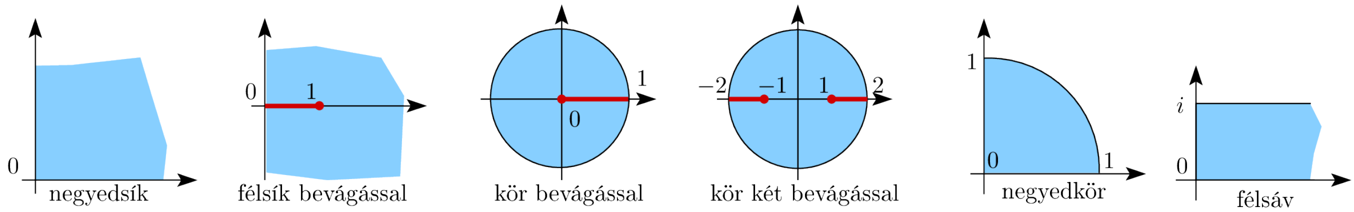
10.4. Tegyük fel, hogy $\varphi(z)$ olyan lineáris törtfüggvény, ami az $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ félkört megfelelteti az $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ negyedsíknak úgy, hogy az $[-1, 1]$ szakasz képe a valós, a félkörvonal képe a képzetes tengely pozitív fele, és $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$.

(a) Határozzuk meg $\varphi(-1)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(\infty)$, $\varphi(i)$ és $\varphi(-i)$ lehetséges értékeit közvetlenül a lineáris törtfüggvények tanult tulajdonságaiból: körtartás, szögtartás, szimmetriatartás, kettősviszonytartás.

(b) Írjuk fel az összes ilyen tulajdonságú $\varphi(z)$-t képlettel.

Házi feladatok

10.5. Keress az alábbi tartományok között konform megfeleltetéseket.



10.6. Írjunk fel (lehetőleg számolás nélkül) egy-egy olyan lineáris törtfüggvényt, amely
(a) a felső félsíkot önmagára képezi úgy, hogy a 0, 1, ∞ pontok képe rendre 1, ∞, 0;
(b) az egységkört a jobb félsíkba képezi;
(c) a jobb félsíkot az egységkörbe képezi;
(d) első síknegyedet az egységkör felső felébe képezi.

10.7. Konstruáljunk olyan, az egységkörből az egységkörbe képező holomorf függvényt, aminek gyökei a körvonal minden pontjához torlódnak, de a függvény nem a konstans 0, mert például $f(0) \neq 0$. (Használjuk lineáris törtfüggvények szorzatát és a Vitali–Montel tételt.)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, beadható dec. 15-ig

PM 10. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ korlátos tartomány (nem feltétlenül egyszeresen összefüggő), $f : D \to D$ holomorf, és $z_0 \in D$ fixpontja $f(z)$-nek. Igazold, hogy $|f'(z_0)| \leq 1$.