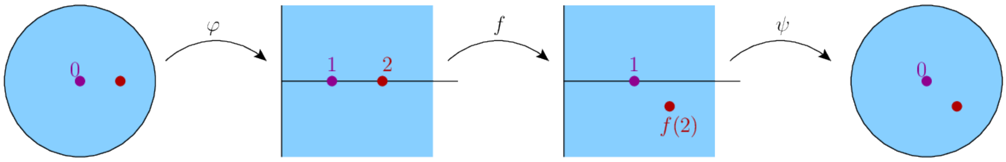
11. KFT gyakorlat, 2023. december 8. 8:25–9:55

11.1. Legyen $\mathbb{D}$ az egységkör, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf, és $a \in \mathbb{D}$ az f-nek gyöke. Bizonyítsuk be, hogy $|f(z)| \le \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$ úgy, hogy

(a) a $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$ függvényre alkalmaazuk a maximum-elvet;

(b) a $h(w) = f\left(\dfrac{w+a}{1+\bar{a}w}\right)$ függvényre felírjuk a Schwarz-lemmát.

11.2. Legyen $J = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ a nyílt jobb félsík. Az $f : J \to J$ függvény holomorf, és $f(1) = 1$. Mi a lehetséges $f(2)$ értékek halmaza? (Komponáljuk f-et lineáris tört függvényekkel, majd Schwarz-lemma.)



11.3. Melyik függvény harmonikus az alábbiak közül? Amelyik harmonikus, az melyik holomorf függvény valós része, és mi a harmonikus konjugáltja?

$$(x,y) \mapsto x; \quad (x,y) \mapsto x^2; \quad x^2+y^2; \quad x^2-y^2; \quad \log(x^2+y^2); \quad \frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}$$

11.4. Igazoljuk, hogy harmonikus függvény parciális deriváltjai is harmonikusak.

11.5. Legyen $D = \{z : 0 < |z| < 1\}$ a kilyukasztott egységkörlemez. Bizonyítsuk be, hogy ha $u : D \to \mathbb{R}$ harmonikus, akkor van olyan holomorf $f : D \to \mathbb{C}$ függvény és $c \in \mathbb{R}$ valós szám, amelyekre $u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c \cdot \log|z|$. (Az előadáshoz hasonlóan, keressük az $f'(z)$ függvényt $u_x(z) - v_y(z) \cdot i - \frac{c}{z}$ alakban.)

Házi feladatok

11.6. Legyen $\mathbb{D}$ az egységkör. Igazoljuk, hogy bármely $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf függvényre és $a, b \in \mathbb{D}$ komplex számokra

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)}\right| \le \left|\frac{a+b}{1-ab}\right|.$$

11.7. Melyik függvény harmonikus az alábbiak közül? Amelyik harmonikus, az melyik holomorf függvény valós része, és mi a harmonikus konjugáltja?

$$(x,y) \mapsto y; \quad xy; \quad x^3y + xy^3; \quad x^3y - xy^3$$

11.8. Mutassuk meg, hogy ha egy kétváltozós valós polinom harmonikus, akkor egy komplex polinom valós része.

11.9. A *Mikulás-szigetcsoport*tól körülbelül kétezer-négyszázhatvan kilométerre északra az Atlanti-óceán feneke kilyukadt, amikor belefúródott a *Kazincbarcika* torpedóromboló. Az elfolyó víz miatt a felszínen stabil, nem örvénylő, forgásszimmetrikus víztölcsér keletkezett.

A tengelytől közepesen nagy távolságban, ahol a vízszintcsökkenés már mérhető, de a víz függőleges irányú sebessége még sokkal kisebb, mint a vízszintes irányú sebessége, a víztölcsér mélységét közelítőleg egy harmonikus függvény írja le. Mi lehet ez a függvény?

(A Kazincbarcika torpedórombolóról Moldova György *A Lakinger Béla zsebcirkáló* c. sziporkájában olvashattok.)

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, beadható dec. 15-ig

PM 11. Legyen $P(x)$ olyan nemkonstans valós polinom, amelyre $P(\cos t)^2 + P(\sin t)^2 = 1$. Mutasd meg, hogy $P(x) = \pm T_k(x)$ valamilyen páratlan pozitív egész k-val. (T_k a k-adik elsőfajú Csebisev-polinom, $T_k(\cos t) = \cos kt$.) Segítség: legyen $\cos t = \frac{z+1/z}{2}$, $\sin t = \frac{z-1/z}{2i}$.