12. KFT gyakorlat, 2023. december 15. 8:25–9:55

12.1. Mondjuk ki, és igazoljuk a következő, komplexből ismert tételek harmonikus megfelelőit: maximum-elv, nyílt leképezés tétele, Liouville-tétel.

12.2. Legyen n pozitív egész és $-1 < a < 1$. A Poisson-formula segítségével számítsuk ki:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1 - 2a\cos t + a^2} \mathrm{d}t = ? \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{1 - 2a\cos t + a^2} \mathrm{d}t = ?$$

12.3. Igazoljuk a kétváltozós Taylor-polinomok segítségével, hogy ha $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, és D minden pontja körül elég kis körökre igaz a középérték-tulajdonság, akkor u harmonikus.

12.4. Találjuk ki a felső félsíkon érvényes Poisson-formulát; konstruáljunk olyan, $x \in \mathbb{R}$ és $y > 0$ esetén érvényes $P_y(x)$ magfüggvényt, amire igaz, hogy ha a valós értékű $h(z)$ függvény harmonikus a felső félsík belsejében, továbbá folytonos és korlátos a felső zárt félsíkon, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ és $y > 0$ esetén

$$h(x + yi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t)\, P_y(x - t)\, \mathrm{d}t.$$

Segítség: Tegyük fel hogy $f(z)$ egy olyan holomorf függvény, aminek a valós része u. Írjuk fel a Cauchy-formulát egy nagy félkörön, és adjunk hozzá egy holomorf függvényt (aminek a vonalintegrálja úgyis 0).

Szorgalmi (Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat, beadható dec. 20-ig

PM 12. Legyen D_1 az ábrán a külső, sötétebben satírozott tartomány, D_2 pedig a külső és a belső rész együtt.

Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $f : D_1 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre a következő állítások ekvivalensek:

(a) f analitikusan folytatható D_2-re;

(b) f-nek létezik akárhányszoros primitív függvénye;

(c) Bármely $g : D_2 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre az fg függvénynek létezik primitív függvénye D_1-en.